बीजगणित.

त्याचें मूळ पुस्तक इंग्रजी भाषेंत आहे,

त्याचें भाषांतर,

पूर्वी क्यापतन जार्ज जार्विससाहेब त्यांनीं

महाराष्ट्र भाषेंत केलें,

त्या भाषांतराची ही पुनरावृत्ति

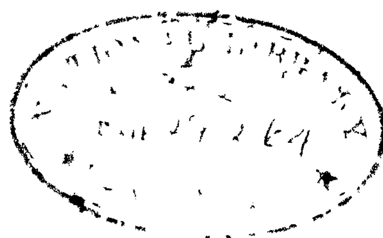
पुणे पाठशाळेकडील छापखान्यांत छापिली.

मुकाम पुणें

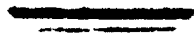
छापणार नारो रामचंद्र ठकार स॰ छा॰

इसवीसन १८५६

शके १७७८



बीजगणिताची अनुक्रमणिका



बीजगणित.

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी.

१ **बीजगणित** म्हणजे हरएक संख्यांचे अंकांवाचून अक्षरचिन्हें करूनच गणित करण्याची विद्या. ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे

२ त्या विद्येमध्यें सर्व पदार्थजातींचे संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात; त्या संगातीं जीं कामें करावयाचीं आहेत, जसें **मिळवणी**, **वजाबाकी** इत्यादिक, तीं सर्व कितीएक स्वल्परूप **कार्यप्रकाशक** चिन्हें करून होतात.

३ बीजगणिताचे उदाहरणांमध्यें कितीएक पदें **व्यक्त**, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं आहेत, ज्यांस भास्कराचार्यांचे बीजगणितांत रूप म्हटलें आहे; आणि जीं दुसरीं पदें **अव्यक्त**, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं नाहींत, त्यांस त्याच आचार्यांचे बीजगणितांत **यावत् तावत्** इत्यादिक नांवें दिलीं आहेत. इंग्रेजी रीतींत व्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपीचे आरंभींचीं **अ ब क** इत्यादिक अक्षरें घेतात; आणि अव्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपी-

चे शेवटील क्ष य ज्ञ इत्यादिक अक्षरें घेतात.

४ कामें दाखविणारीं जीं चिन्हें आहेत त्यांस **कार्यप्रकाशक** चिन्हें म्हणतात; तीं लिहितों.

+ हें चिन्ह मिळवणी दाखवितें, त्या ठिकाणीं अधिक असें म्हणतात, त्यास धनचिन्ह म्हणावें.

— हें चिन्ह वजाबाकी दाखवितें, त्या ठिकाणीं उणें असें म्हणतात, त्यास ऋणचिन्ह म्हणावें.

× हें अथवा ० हें चिन्ह गुणाकार दाखवितें, त्या ठिकाणीं गुणिलें असें म्हणतात. ज्या संख्याप्रकाशक अक्षरांचा गुणाकार करावयाचा आहे तीं अक्षरें चिन्हावांचूनच जवळ जवळ लिहिलीं असतां त्यांचा परस्पर गुणाकार आहे असें समजावें.

÷ हें चिन्ह भागाकार दाखवितें, त्या ठिकाणीं भागिलें असें म्हणतात.

√ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखवितें; ∛ हें चिन्ह घनमूळ दाखवितें; ∜ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दाखवितें; त्याप्रमाणें पुढें ही. आणि $\sqrt[n]{}$ हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दाखवितें.

: :: : हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दाखवितें.

= हें चिन्ह बरोबरी दाखवितें, त्या ठिकाणीं बरोबर असें

म्हणतात, अथवा म्हणजे असा शब्द बोलतात.

आतां वर सांगितलेले चिन्हांचीं उदाहरणें लिहितों.

अ + ब हें दाखवितें कीं, बचे संख्येस अची संख्या मिळवावी.

अ − ब ह्यांतील चिन्ह दाखवितें कीं, अचे संख्येंतून बची संख्या वजा करावी.

अ ∼ ब हें चिन्ह अ आणि ब ह्या दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवितें, परंतु ह्या दोन संख्यांत लहान कोणती आणि मोठी कोणती हें विदित नाहीं.

अब अथवा अ×ब किंवा अ.ब हें चिन्ह अ आणि ब ह्या दोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें.

अ ÷ ब अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें कीं, अची संख्या बचे संख्येनें भागावी.

अ : ब : : क : ड हें दाखवितें कीं, जसें अ प्रमाण बला होतें तसें क प्रमाण डला होतें.

क्ष = अ − ब + क हें समीकरण आहे; तें दाखवितें कीं, अ आणि ब ह्यांचे संख्यांची वजाबाकी करून त्यांत कची संख्या मिळवावी, तें क्षचे बरोबर आहे.

√ अ अथवा अ^½ हें अचें वर्गमूळ दाखवितें ∛

अ अथवा $अ^{१/३}$ हें अचें घनमूळ दाखवितें. $\sqrt[३]{अ^{२}}$ अथवा $अ^{२/३}$ हें अचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितें. $\sqrt[म]{अ}$ अथवा $अ^{१/म}$ हें अचें म संख्या घातमूळ दाखवितें. $\sqrt[म]{अ^{न}}$ हें दाखवितें कीं, जितकी म संख्या आहे तितकें अ संख्येचें घातमूळ काढावें. आणि त्या मुळाचा न संख्या घात करावा. अथवा $\frac{न}{म}$ ह्याचा भागाकार येईल तितकी अची संख्या वर्गादिकें करून वाढवावी, किंवा मूळ काढावें.

$अ^{२}$ हें अचा वर्ग दाखवितें. म्हणजे अ·अ. $अ^{३}$ हें अचा घन दाखवितें म्हणजे अ·अ·अ. $अ^{४}$ हें अचा चतुर्घात दाखवितें. $अ^{न}$ हें नची संख्या आहे तितका अचा घात दाखवितें

$\overline{अ+ब}\times क$, अथवा (अ + ब) क हें अ + बत्या संयुक्त पदाला क ह्यानें गुणिलें असतां जो गुणाकार होतो तो दाखवितें ——ह्याप्रमाणें वरती रेघ किंवा ( ) ह्याप्रमाणें दोन बाजूंस दोन कौंस हें चिन्ह वियुक्त पदें परस्पर संबद्ध ह्यामुळें संयुक्त असें दाखवितें.

$\overline{अ+ब}\div\overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हें अ+ब भागिला अ− बनें त्यापासून जो भागाकार तो दाखवितें.

√अब+कड अथवा (अब+कड)$^{\frac{१}{२}}$ हें अब+कड त्या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ दाखवितें, आणि क√अब+कड अथवा क(अब+कड)$^{\frac{१}{२}}$ हें अब+कड त्या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ क त्या एक पदानें गुणून जो गुणाकार होतो तो दाखवितें.

अ+ब−क^{३} अथवा (अ+ब−क)^{३} हें अ+ब−क त्या संयुक्त पदाचा घन दाखवितें.

२ अ हें अची संख्या २ त्यांनीं गुणावी असें दाखवितें. आणि ४ (अ+ब) हें अ+ब त्या संयुक्त पदाचे संख्येस ४ त्यांनीं गुणावें असें दाखवितें; आणि $\frac{३}{४}$ क्ष हें तीन चतुर्थांशांनीं गुणिला क्ष असें दाखवितें.

५ सरूप पदें तींच होत ज्यांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक एकच आहेत, जसें अ आणि ३अ अथवा २अब आणि ४ अब अथवा २अ^{२}बक आणि −५अ^{२}बक.

६ विरूप पदें तींच होत ज्यांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक हीं भिन्नजाति आहेत, जसें अ आणि ब, अथवा २अ आणि अ^{२}, अथवा ३अब^{२} आणि २अबक.

७ एकपद तेंच होय ज्यांत एकच रकम आहे, जसें ३अ, अथवा ५अब, अथवा ६अबक^{२}.

८ संयुक्तपदें तींच होत ज्यांत दोन तीन आदिकरून अनेक रकमा परस्पर संबद्ध आहेत, जसें अ+ब, अथवा २अ−३क, अथवा अ+२ब−३क.

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्यास द्वियुक्पद म्हणतात; जसें अ+ब.—जेव्हां त्यांत तीन पदें आहेत तेव्हां त्यास त्रियुक्पद म्हणतात, जसें अ+२ब−३क— जेव्हां त्यांत चार रकमा आहेत तेव्हां त्यास चतुर्युक्पद म्हणतात, जसें २अ−३ब+क−४ड. आणि त्याप्रमाणेंच पंचयुक्पद इत्यादिक पुढें ही जाणावीं. आणखी ही ज्यांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद म्हणतात.

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एक रकम ऋण आहे तव्हां त्यास धनर्णपद म्हणतात. जसें अ−२ब.

११ धनपद तेंच होय. जें मिळवायाचें आहे, ज्यास + हें अधिकजातिप्रकाशक चिन्ह जोडिलें आहे, जसें +अ. जेव्हां कोणतें ही पद कोणतेही चिन्हावांचून असेल तेव्हां तें धन आहे असें समजावें, जसें अ म्हणजे +अ.

१२ ऋणपद तेंच होय; जें वजा करायाचें आहे, जसें −अ अथवा −२अब अथवा −३अब^{२}.

१३ सरूप चिन्हें तींच होत, जीं सर्व (+) धन किंवा सर्व (−) ऋण आहेत.

१४ विरूप चिन्हें तींच होत, ज्यांत कितीएक (+) धन आणि कितीएक (−) ऋण अशीं आहेत.

१५ कोणतेही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय, जो अंक त्या पदाचे मागें लिहिला आहे, जसें ३अब एथें ३ हा अंक वेळाप्रकाशक आहे.

१६ घात म्हणजे कोणतेंही पद, जसें अ, त्याचें वर्गादिक, जसें अ^{२}, अ^{३}, अ^{४}, त्याप्रमाणें पुढें ही.

१७ घातप्रकाशक अथवा घातमूलप्रकाशक तोच अंक होय, जो त्या पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूलादिक दाखविती, म्हणजे २ हा अंक वर्गप्रकाशक, जसें अ^{२}; आणि ३ हा अंक घनप्रकाशक, जसें अ^{३}; आणि $\frac{१}{२}$ हा वर्गमूलप्रकाशक, जसें अ$^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{अ}$; आणि $\frac{१}{३}$ हा घनमूळ-प्रकाशक, जसें अ$^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{अ}$.

१८ अखंडपद तेंच होय, ज्यास मूळप्रकाशक (√) नाहीं, जसें अ अथवा ३अब.

१९ खंडपद अथवा करणी तीच होय, ज्याचें मूळ अंशांवांचून केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं, जसें २, ३, ५

इत्यादिक. त्यांचें वर्गमूळ केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं. करणीस मूळप्रकाशक ($\surd$) जोडिला राहतो, जसें $\surd$२, अथवा $\surd$अ अथवा $\sqrt[३]{अ^{२}}$. किंवा करणी अशी ही लिहितात, जसें $२^{\frac{१}{२}}$, $अ^{\frac{१}{२}}$ $अ^{\frac{२}{३}}$.

२० कोणत्याही पदाचा **व्युत्क्रम** तोच होय, जें पद उलटें लिहिलें, अथवा त्या पदानें १ भागिलेला, जसें अ अथवा $\frac{अ}{१}$ त्याचा व्युत्क्रम हा होय $\frac{१}{अ}$. आणि $\frac{अ}{ब}$ त्याचा व्युत्क्रम हा होय $\frac{ब}{अ}$.

२१ जीं अक्षरें एकेक पदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इच्छेस येईल त्या क्रमानें लिहावीं, जसें अ आणि ब त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो. **अब**, अथवा **बअ**; आणि अ, ब, क, त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो, **अबक**, अथवा **अकब**, अथवा **बअक**, अथवा **बकअ**, अथवा **कअब** किंवा **कबअ**, त्यांत कोणताही प्रथम गुणिला म्हणून चिंता नाहीं. गुणाकार बरोबरच येतो.

२२ त्याप्रमाणें संयुक्त पदाच्या वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इच्छेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या, त्यांची किंमत अथवा अर्थ बराबरच आहे. जसें ३अ−२अब+

४ अबक, हे असेही लिहितां येतात, ३अ + ४अबक − २अब. अथवा त्याप्रमाणें, ४अबक + ३अ − २अब. किंवा त्याप्रमाणेंही, − २अब + ४अबक + ३अ इत्यादि. म्हणजे हे सर्व ४ अबक आणि ३अ त्यांचे बेरजेंतून २ अब वजा करून जी बाकी राहाती तिचे बराबर दाखवितात. परंतु बहुत करून धन रकम आरंभीं लिहितात अशी चाल आहे.

त्या सर्व वरच्या व्याख्या समजावयाकरितां कितीएक उदाहरणें लिहितों.

तीं अशीं कीं, वेगळाल्या चिन्हांचे संयुक्तपदांपासून संख्या काढावयाची.

मनांत आण कीं, पुढील उदाहरणांत अ = ६, ब = ५, क = ४, ड = १, ई = ०

उदाहरणें

पहिलें, $अ^{२} + ३अब \quad क^{२}$ त्यांची संख्या काय होती?

उत्तर. ३६ + ९० − १६ = ११०

दुसरें, $२अ^{३} − ३अ^{२}ब + क^{३}$ त्याची संख्या काय

होती ?

उत्तर, $४३२ - ५४० + ६४ = - ४४$

तिसरें, $\text{अ}^{२} \times \overline{\text{अ} + \text{ब}} - २\text{अबक}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $२६ \times ११ - २४० = १५६$.

चौथें, $\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अ} + ३\text{क}} + \text{क}^{२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{२१६}{१८} + १६ = १२ + १६ = २८$

पांचवें, $\sqrt{२\text{अक} + \text{क}^{२}}$ अथवा $\overline{२\text{अक} + \text{क}^{२}}^{\frac{१}{२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{६४} = ८$

साहावें, $\sqrt{\text{क}} + \frac{२\text{यक}}{\sqrt{२\text{अक} + \text{क}^{२}}}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $२ + \frac{४०}{८} = ७$

सातवें $\frac{\text{अ}^{२} - \sqrt{\text{ब}^{३} - \text{अक}}}{२\text{अ} - \sqrt{\text{ब}^{२} + \text{अक}}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{३६ - १}{१२ - ७} = \frac{३५}{५} = ७$

आठवें, $\sqrt{\text{ब}^{२} - \text{अक}} + \sqrt{२\text{अक} + \text{क}^{२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $१ + ८ = ९$

नववें, $\sqrt{\text{ब}^{२} - \text{अक} + \sqrt{२\text{अक} + \text{क}^{२}}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{२५ - २४ + ८} = ३$

दाहावें, $अ^{३}ब + क - ड$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १८३

अकरावें, $९अब - १०ब^{२} + क$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, २७० − २५० + ४ = २० + ४ = २४

बारावें, $\frac{अ^{२}ब}{क} \times ड$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

तेरावें, $\frac{अ+ब}{क} \times \frac{ब}{ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१२\frac{३}{४}$

चौदावें, $\frac{अ+ब}{क} - \frac{अ-ब}{ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१\frac{३}{४}$

पंधरावें, $\frac{अ^{२}ब}{क} + ई$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

सोळावें, $\frac{अ^{२}ब}{क} \times ई$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ०

सत्रावें, $\overline{ब-क} \times \overline{ड-ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १

अठरावें, $\overline{अ+ब} - \overline{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ८

एकुणिसावें, $\overline{अ+ब} - क - ड$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ६

विसावें, $अ^{२} क \times ड^{२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १४४

एकविसावें, $अ क ड - ड$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, २२

बेविसावें, $अ^{२} ई + ब^{२} ई + ड$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १

तेविसावें, $\frac{ब-ई}{ह-ई} \times \frac{अ+ब}{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १८ $\frac{१}{२}$

चोविसावें, $\sqrt{अ^{२}+ब^{२}} - \sqrt{अ^{२}-ब^{२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ४·४९३६२४९

पंचविसावें, $२अक^{२} + \sqrt{अ^{२}-ब^{२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, २९२·४९७९४२

सविसावें, $४अ^{२} - २अ\sqrt{अ^{२} - \frac{२}{३}अब}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ७२

मिळवणी.

बीजगणितांत मिळवणी तीच होय जें वेगळालीं पदें त्यांचे त्यांचे चिन्हांनीं जोडून लिहिणें. जेव्हां सरूप पदेंच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एक रकम करावी जसें, ३अ + २ब - २अ ह्यांची बेरीज, अ + २ब.

बीजगणितांत मिळवणीचे रीतीचे प्रकार तीन आहेत.

१ वेगळालीं पदें सरूप आणि त्यांचीं चिन्हेंही सरूप आहेत.

२ वेगळालीं पदें सरूप आहेत, परंतु त्यांचीं चिन्हें विरूप आहेत.

३ वेगळालीं पदें विरूप आहेत, त्यांचीं कामें पुढें सांगतों.*

---

* जीं पदें मिळवायाचीं आहेत त्यांची जाति लक्ष्यांत आणिली असतां या कामाचा आश्रय आणि त्या प्रकारांचीं कारणें स्वल्पांत समजांत येतील, म्हणून प्रथम प्रकारांत दोन पदें आहेत २अ आणि ५अ. आतां एथें एक रकमेंतील अ जी वस्तु निवेदितो तीच वस्तु दुसरे रकमेंतील ही अ निवेदितो. तेव्हां जी वस्तु २वेळां तीच वस्तु पुनः ५वेळां एकूण आठ वेळां, परंतु वस्तु तीच हा निश्चय. जर अ एक रुपया निवेदितो तर ३अ ३रुपये आणि ५अ ५रुपये, त्यांची बेरीज ८अ म्हणजे ८ रुपये झाली. याप्रमाणें -२अब आणि -७अब अथवा कोणती ही वस्तु -२ आणि तीच वस्तु -७ हे दोन्ही मिळून तीच वस्तु -९ बेरीज झाली.

प्रथमप्रकार,

जेव्हां वेगळालीं पदें सरूप आहेत आणि त्यांचीं चिन्हें ही सरूप आहेत.

आतां दुसरे प्रकारांत पदें मात्र सरूप आणि चिन्हें विरूप या प्रकारानें कारणयापासून सत्वांत समजांत येईल, कीं मिळवणी म्हणजे ही आहे जे वेगळालीं पदें गणितरीतीनें एकत्र मिळवावीं, जशीं त्यांचीं चिन्हें + धन आणि − ऋण हीं दाखवितात म्हणजे मिळवणी आणि वजाबाकी, परंतु .

हीं दोन कामें परस्पर विरुद्ध याजकरितां असें आल्यास एकाचा वेळापकाराक दुसऱ्याच्यांतून वजा केला पाहिजे, असा कीं त्यापदांची एकत्र रकम होईल.

आतां तिसरे प्रकारांत जेव्हां सर्व पदें विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसतें कीं अशीं पदें एकत्र रकमेंत कदापि येणार नाहींत म्हणून त्यांची वेरीज वेगळाल्या रकमा त्यांचे त्यांच चिन्हांनीं जोडिल्यावांचून दुसऱ्या रीतीनें कदापि होणार नाहीं. जसें, जर अ एक रुपया निवेदितो आणि ब एक पैसा तर अ आणि ब यांची वेरीज २अ किंवा २ब होणार नाहीं, म्हणजे २ रुपये किंवा २ पैसे नाहींत, परंतु अ+ ब हें आहे, कीं एक रुपया अधिक एक पैसा .

या रीतींत मिळवणी हा शब्द चांगले प्रकारें लागत नाहीं. एथें जितकें काम करायाचें आहे तितका पूर्ण अर्थ या शब्दापासून मिळत नाहीं. तें काम हें आहे कीं वेगळालीं पदें एकत्र मिळतील तर मिळवावीं, न मिळतील तर त्यांचीं त्यांचीं चिन्हें जोडून अनुक्रमें लिहावीं. जेव्हां वेगळाल्या पदांत कित्येक + धन आणि कित्येक − ऋण आहेत. तर त्यांत सरूप पदें असतील तीं पूर्व रीतीनें एकत्र करितां येतील.

बीजगणितांत मिळवणी पाहातां कोठें अनेक रकमांची एक रकम करणें, कोठें वजाबाकी करणें, असें परम आश्चर्य दिसतें, परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी असा येथें मनांत आणिल्यावर किमपि आश्चर्य नाहीं असें दिसेल.

रीति.

सर्व वेळाप्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी. नंतर त्या सरूप पदांचें अक्षर पुढें लिहावें आणि प्रकाशक चिन्ह + धन किंवा − ऋण असेल तें आदी जोडावें.

जसें ३ अ आणि ५ अ ह्या दोहोंची बेरीज ८ अ होती.

− २ अब आणि − ७ अब त्यांची बेरीज − ९ अब होती

५ अ + ७ ब आणि ७ अ + ३ ब त्यांची बेरीज १२ अ + १० ब होती.

हीच रीति समजायाकरितां दुसरीं उदाहरणें.

३ अ	− २ बक्ष	बक्षय
९ अ	− ५ बक्ष	२ बक्षय
५ अ	− ४ बक्ष	५ बक्षय
१२ अ	− २ बक्ष	बक्षय
अ	− ७ बक्ष	३ बक्षय
२ अ	− बक्ष	६ बक्षय
३२ अ	− २२ बक्ष	१८ बक्षय
७ ह्न	३ क्षे + ५ क्षय	२ अक्ष − ४ य
२ ह्न	क्षे + क्षय	४ अक्ष − य
४ ह्न	२ क्षे + ४ क्षय	अक्ष − ३ य
ह्न	५ क्षे + २ क्षय	५ अक्ष − ५ य
१ ह्न	४ क्षे + ३ क्षय	७ अक्ष − २ य
१५ ह्न.	१५ क्षे + १५ क्षय	१९ अक्ष − १५ य

५ क्षय	−१२ प^{२}	४ अ − ४ ब
१४ क्षय	− ७ प^{२}	५ अ − ५ ब
२२ क्षय	− २ प^{२}	५ अ − ब
१७ क्षय	− ४ प^{२}	३ अ − २ ब
१३ क्षय	− प^{२}	२ अ − ७ ब
३ क्षय	− ३ प^{२}	८ अ − ब

३० − १३ क्ष^{२} − ७ क्षय	५ क्षय − ३ क्ष + ४ अब
२३ − १० क्ष^{२} − ४ क्षय	८ क्षय − ४ क्ष + २ अब
१४ − १४ क्ष^{२} − ७ क्षय	३ क्षय − ५ क्ष + ५ अब
१० − १६ क्ष^{२} − ५ क्षय	क्षय − २ क्ष + अब
१६ − २० क्ष^{२} − क्षय	४ क्षय − क्ष + ७ अब

दुसरा प्रकार

जेव्हां वेगळालीं पदें सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिन्हें विरूप आहेत

रीति.

धन वेळाप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि ऋण वेळाप्रकाशकांची बेरीज घ्यावी, नंतर ह्या दोन बेरिजांत जी अधीक असेल त्यांतून उणी बेरीज वजा करून बाकी राहील तिचें पा-

ठी भागें अधिक बेरिजेचें प्रकाशक चिन्ह जें असेल तें लिहावें, आणि त्याचे पुढें ह्या बाकी सरूप पदांचें अक्षरचिन्ह लिहावें.

जसें +५ अ आणि −३ अ, त्यांची बेरिज +२ अ झाली.

−५ अ आणि +३ अ त्यांची बेरीज −२ अ झाली.

हीच रीति समजावें याकरितां दुसरीं उदाहरणें

−५ अ	+३ अक्ष^{२}	+८ क्ष^{३} −३ य
+४ अ	+४ अक्ष^{२}	−५ क्ष^{३} +४ य
+६ अ	−८ अक्ष^{२}	−१६ क्ष^{३} +५ य
−३ अ	−६ अक्ष^{२}	+३ क्ष^{३} −७ य
+ अ	+५ अक्ष^{२}	+२ क्ष^{३} −२ य
+३ अ	−२ अक्ष^{२}	−८ क्ष^{३} −३ य

−३ अ^{२}	+३ ब^{२} य^{३}	+४ अब +४
−५ अ^{२}	+९ ब^{२} य^{३}	−४ अब +१२
−१० अ^{२}	−१० ब^{२} य^{३}	+७ अब −१४
+१० अ^{२}	−११ ब^{२} य^{३}	+ अब +३
+१४ अ^{२}	−२ ब^{२} य^{३}	−५ अब −१०

−३ अक्ष रे	+१० √अक्ष	+३ य +४ अक्ष रे
+ अक्ष रे	−३ √अक्ष	− य −५ अक्ष रे
+५ अक्ष रे	+४ √अक्ष	+४ य +२ अक्ष रे
+६ अक्ष रे	−१२ √अक्ष	−२ य +६ अक्ष रे

तिसरा प्रकार.

जेव्हां वेगळालीं पदें विरूप आहेत तेव्हां.

रीति.

पूर्वीं सांगितल्या दोन रकमाप्रमाणें सरूप पदें एकत्र मिळवून लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे प्रकाशकचिन्हांसहवर्तमान एकापुढें एक जोडून लिहावीं.

उदाहरणें.

$३क्षय$	$-६क्षय-१२क्ष^{२}$	$४अक्ष-१३०+३क्ष^{२}$
$२अक्ष$	$-४क्ष^{२}+३क्षय$	$५क्ष^{२}+३अक्ष+९क्ष^{२}$
$-५क्षय$	$+४क्ष^{२}+२क्षय$	$७क्षय-४क्ष+१०$
$६अक्ष$	$-३क्षय+४क्ष^{२}$	$\sqrt{क्ष}+४०-६क्ष^{२}$
$-२क्षय+८अक्ष$	$-४क्षय-८क्ष^{२}$	$७अक्ष+८क्ष^{२}+७क्षय$

$९क्ष^{२}य^{२}$	$१४अक्ष-२क्ष^{२}$	$९-१०\sqrt{अक्ष}-५य$
$-७क्ष^{२}य$	$५अक्ष+३क्षय$	$२क्ष+७\sqrt{क्षय}+५य$
$+३अक्षय$	$८य^{२}-४अक्ष$	$५य+३\sqrt{अक्ष}-४य$
$+४क्ष^{२}य$	$३क्ष^{२}+२६$	$१०-४\sqrt{अक्ष}+४य$

$४क्ष^{२}य$	$४\sqrt{क्ष}-३य$	$३अ^{२}+९+क्ष^{३}-४$
$-६क्षय^{२}$	$२\sqrt{क्षय}+१४क्ष$	$२अ-८+२अ^{२}-३क्ष$
$+३य^{२}क्ष$	$३क्ष+२य$	$४क्ष^{२}-२अ^{२}+१८-७$
$-७क्ष^{२}य$	$-९-३क्षय$	$-१२-अ-३क्ष^{२}-२य$

आणखी उदाहरणें.

प्रथम, अ+ब आणि २अ-५ब त्यांची बेरीज काय होईल?

दुसरें, ५अ-८क्ष आणि ७अं-४क्ष त्यांची बेरीज काय होईल?

तिसरें, ६क्ष-५ब+अ+८ आणि -५अ-४क्ष+४ब-७ त्यांची बेरीज काय होईल?

चौथें, अ+२ब-७क-१० आणि २ब-४अ+५क+१० आणि ५ब-क त्यांची बेरीज काय होईल?

पांचवें, अ+ब आणि अ-ब त्यांची बेरीज काय होईल?

साहावें, ३अ+ब-१० आणि क-ड-अ आणि -४क+२अ-३ब-७ त्यांची बेरीज काय होईल?

सातवें, $३अ^{२}$+$ब^{२}$-क आणि २अब-$३अ^{२}$+बक-ब त्यांची बेरीज काय होईल?

आठवें, $अ^{२}$+$ब^{२}$क-$ब^{२}$ आणि $अब^{२}$-अबक+$ब^{२}$ त्यांची बेरीज काय होईल?

नववें, ९अ-८ब+१०क्ष-६ड-७क+५० आणि २क्ष-३अ-५क+४ब+६ड-१० त्यांची बेरीज काय होईल?



वजाबाकी.

जर कोणत्याही पदापासून कांहीं ही वजा करायाचें आहे तर तें पद वर एके ओळींत लिहावें, नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्याचे खालीं लिहावें. असें कीं, सरूप अक्षरें एकाखालीं एक अशीं येतील.

नंतर खालचे ओळींतील चिन्हें + धन आणि – ऋण असतील तीं बदल करून लिहावीं. अथवा बदल केलीं असें मनांत आणावें. नंतर मिळवणीचे रीतीनें तीं सर्व पदें एकत्र करावीं.*

---

* या रीतीस आश्रय हाच आहे कीं, मिळवणी आणि वजाबाकी यांची जाति आणि कामें परस्पर विरुद्ध आहेत, हें त्यांचीं चिन्हें दाखवितात. + आणि – कोणतीही ऋण पदें दुसरे धनपदांशीं मिळविता असें कार्य होतें. कीं धनपदांतून या ऋणपदांबरोबर धनपद वजा केलें. आतां वजाबाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे. याजकारितां धनपद कोणत्याही दुसऱ्या धनपदांतून वजा करणें हें त्याचे बरोबर आहे, कीं ऋण पद धन पदास मिळविलें. यारीतीनें एक ऋण पद मिळविणें हें याचे बरोबर आहे. कीं एक धन पद मिळविलें. याप्रमाणें कोणत्याही पदांचीं चिन्हें बदल करितां म्हणजे + धन ठिकाणीं – ऋण आणि – ऋण ठिकाणीं + धन. याप्रमाणें करितां त्या पदांची जाति ही बदल होती, म्हणजे पूर्वी वजाबाकीचें रूप होतें तें मिळवणीचें रूप झालें.

७अ^{२}-२ब यांतून	९क्ष^{२}-४य+८	८क्षय-३+६क्ष-य
२अ^{२}-८ब हे वजा	६क्ष^{२}+५य-४	४क्षय-७-६क्ष-४य
५अ^{२}+५ब बाकी.	३क्ष^{२}-९य+१२	४क्षय+४+१२क्ष+३य
५क्षय-६	४य^{२}-३य-४	-२०-६क्ष-५क्षय
-२क्षय+६	२य^{२}+२य+४	७क्षय-९क्ष+८-२अय
७क्षय-१२	२य^{२}-५य-८	-२८+३क्ष-१२क्षय+२अय
८क्ष^{२}य+६	५√क्षय+२क्ष√क्षय	९क्ष^{३}+२√क्ष-१८+३ब
-२क्ष^{२}य+२	७√क्षय+३-२क्षय	९क्ष^{३}-१२+५ब+क्ष^{२}
५क्षय-३०	७क्ष^{२}-२(अ+ब)	७क्षय^{२}+२०अ√(क्षय+१०)
७क्षय-५०	२क्ष^{२}-४(अ+ब)	४क्षय^{२}+१२अ√(क्षय+१०)

आणखी उदाहरणें

प्रथम, अ+२ यांतून अ-ब हे वजा कर.

दुसरें, ४अ+४ब यांतून ब+अ हे वजा कर.

तिसरें, ४अ-४ब यांतून ३अ+५ब हे वजा कर.

चौथें, ८अ-१२क्ष यांतून ४अ-३क्ष हे वजा कर.

पांचवें, ३क्ष-४अ-२ब+५ यांतून ८-५ब+अ+६क्ष हे वजा कर.

साहावें, ७अ+ब+क-ड-१० त्यांतून क+२अ-ड हे वजा कर.

सातवें, २अ+ब+क-ड-१० त्यांतून ब-१०+७अ हे वजा कर.

आठवें, २अब+ब-४क+बक-ब त्यांतून ७$अ^2$ -क+$ब^2$ हे वजा कर.

नववें, $अ^3$+$ब^2$क+$अब^2$-अबक त्यांतून $ब^3$+$अब^2$-अबक हे वजा कर.

दाहावें, १२क्ष+६अ-४ब+४० त्यांतून ४ब-७अ+४क्ष+६ड हे वजा कर.

अकरावें, २क्ष-२अ+४ब+६क-५० त्यांतून ९अ+क्ष+६ब-६क-४० हे वजा कर.

बारावें, ६अ-४ब-१२क+१२क्ष त्यांतून २क्ष-७अ+४ब-५क हे वजा कर.



गुणाकार

गुणाकारांत गुण्य आणि गुणक त्यांचीं पदें एकाकी अथवा संयुक्त, याजवरून त्याचे अनेक प्रकार आहेत.

प्रथम प्रकार.

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही पदें एकाकी आहेत.

रीति.

गुण्य आणि गुणक त्यांचे वेळाप्रकाशांक परस्पर गुणून लिहावे, नंतर दोन रकमांचीं जीं अक्षरें आहेत तीं सर्व जोडून त्या गुणाकारापुढें लिहावीं; म्हणजे हें सर्व मिळून गुणाकार झाला.

गुण्य आणि गुणक त्यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास गुणाकार (+) धन होतो, आणि तीं विरूप असल्यास गुणाकार (−) ऋणहोतो.*

---

* या रीतीच्या रवरेपणा या पुढील लिहिल्यावरून समजोन येतो.

१ जेव्हां +अ हा +क संगातीं गुणायाचा आहे, यांतील अर्थ हांकीं, +क यामध्यें जितकी संख्या आहे तितक्या वेळां +अ घेतला पाहिजे. आ

उदाहरणें.

१० अ	-३ अ	७ अ	-६ अ	हे गुण्य.
२ ब	+२ ब	-४ क	-४ अ	हे गुणक
२० अब	-६अब	-२८अक	२४ अअ	हा गुणाकार.

तां ज्या रकमा धन आहेत त्यांची वेरीज धन होती. यांतून निघतें कीं, + अ × + क यांचा गुणाकार + अक होतो.

२ जेव्हां दोन आदिकरून पदें परस्पर गुणायाचीं आहेत तर कोणतेही तन्हेनें तीं पदें लिहिलीं तरी गुणाकार बरोबर येईल. म्हणजे अ × क आणि क × अ हे दोनही एकच आहेत. याजकरितां जेव्हां - अ हा + क यानें गुणायाचा, अथवा + क हा - अ यानें गुणायाचा आहे, यात अर्थ हा आहे कीं, जितकी संख्या + क यामध्यें आहे तितक्या वेळां - अ घेतला पाहिजे. आतां ज्या रकमा ऋण आहेत त्यांची बेरीज ऋण होते. यांतून निघतें कीं - अ × + क अथवा + क × - अ हे दोनही गुणाकार - अक होतात.

३ जेव्हां - अ आणि - क हे परस्पर गुणायाचे आहेत, एथें जी संख्या - क यामध्यें आहे तितक्या वेळां - अ वजा केला पाहिजे. परंतु ऋण वजा करणें हें पूर्वी सांगितलें. वजाबाकीवरील टीपेप्रमाणें धनाचे मिळवणी बराबर आहे. क × अ अथवा + अक.

असें नसेल अ-अ= ० याजकरितां (अ-अ) × -क हें ही = ० कारण कोणतेही पदानें ० शून्य गुणिल्यास गुणाकार ० शून्य होईल. आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ × -क = -अक हें दुसरे प्रकाराप्रमाणें सिद्ध आहे, याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम -अ × -क = निश्चय + अक असा कीं, दोन रकमांची बेरीज ० शून्याबराबर होईल, याप्रमाणें -अक +अक= ० शून्य. यांतून निघतें कीं -अ × -क= + अक आहे.

४अक	९अक्ष	−२क्ष^{2}य	−४क्षय
−३अब	४क्ष	३क्षय^{2}	−क्षय
−१२अ^{2}बक	३६अक्ष^{2}	−६क्ष^{3}य^{3}	४क्ष^{2}य^{2}

−३अक्ष	−अक्ष	३क्षय	−९क्षयज्ञ
४क्ष	−६क	−४	−५अक्ष

दुसरा प्रकार.

जेव्हां गुण्य आणि गुणक त्यांत एक संयुक्तपद आहे.

रीति.

संयुक्तपदाची एक एक रकम वेगळाली एक पदानें पूर्व रीतीप्रमाणें गुणावी, गुणाकार येईल तो एकापुढें एक त्याचे त्याचे चिन्हानें युक्त करून अनुक्रमानें लिहावा, म्हणजे सर्व मिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें

५अ−३क	३अक−४ब	२अ^{2}−३क+५
२अ	३अ	बक
१०अ^{2}−६अक	९अ^{2}क−१२अब	२अ^{2}बक−३बक^{2}+५बक

१२क्ष-२अक	२५क-७ब	४क्ष-ब+३अब
४अ	-२अ	२अब
$७क^{३}$+क्ष	$१०क्ष^{२}-७य^{२}$	$३अ^{२}-२क्ष^{२}-६ब$
४क्षय	$-४क्ष^{२}$	$२अक्ष^{२}$

तिसराप्रकार

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्त पदेंच आहेत.

रीति.

गुण्याच्या सर्व वेगळाल्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळाल्या रकमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या, अशा कीं गुण्याची एक एक रकम सर्व गुणकानें गुणिली जाईल, गुणाकार येईल तो एकाखा-लीं एक अथवा एकापुढें एक अनुक्रमें लिहावा. नंतर त्यांत जीं सरूप पदें असतील तीं सर्व एकत्र करावीं, म्हणजे सर्व मिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

$$\begin{array}{l}\text{अ}+\text{ब}\\ \underline{\text{अ}+\text{ब}}\\ \text{अ}^{२}+\text{अब}\\ \quad\underline{+\text{अब}+\text{ब}^{२}}\\ \text{अ}^{२}+\text{२अब}+\text{ब}^{२}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{३क्ष}+\text{२य}\\ \underline{\text{४क्ष}-\text{५य}}\\ \text{१२क्ष}^{२}+\text{८क्षय}\\ \qquad\underline{-\text{१५क्षय}-\text{१०य}^{२}}\\ \text{१२क्ष}^{२}-\text{७क्षय}-\text{१०य}^{२}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{२क्ष}^{२}+\text{क्षय}-\text{२य}^{२}\\ \underline{\text{३क्ष}-\text{३य}}\\ \text{६क्ष}^{३}+\text{३क्ष}^{२}\text{य}-\text{६क्षय}^{२}\\ \qquad\underline{-\text{६क्ष}^{२}\text{य}-\text{३क्षय}^{२}+\text{६य}^{३}}\\ \text{६क्ष}^{३}-\text{३क्ष}^{२}\text{य}-\text{९क्षय}^{२}+\text{६य}^{३}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{अ}+\text{ब}\\ \underline{\text{अ}-\text{ब}}\\ \text{अ}^{२}+\text{अब}\\ \quad\underline{-\text{अब}-\text{ब}^{२}}\\ \text{अ}^{२}\ \ast\ -\text{ब}^{२}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{क्ष}^{२}+\text{य}\\ \underline{\text{क्ष}^{२}+\text{य}}\\ \text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{२}\text{य}\\ \quad\underline{+\text{क्ष}^{२}\text{य}+\text{य}^{२}}\\ \text{क्ष}^{४}+\text{२क्ष}^{२}\text{य}+\text{य}^{२}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{अ}^{२}+\text{अब}+\text{ब}^{२}\\ \underline{\text{अ}-\text{ब}}\\ \text{अ}^{३}+\text{अ}^{२}\text{ब}+\text{अब}^{२}\\ \quad\underline{-\text{अ}^{२}\text{ब}-\text{अब}^{२}-\text{ब}^{३}}\\ \text{अ}^{३}\ \ast\ \ \ast\ -\text{ब}^{३}\end{array}$$

जेव्हां संयुक्त पदांस परस्पर गुणितात तेव्हां गुणायाचा आरंभ डावेकडून करावा म्हणजे अंकगणित गुणाकाराच्चे उलटा, आणि गुणाकार लिहितेसमयीं पूर्व ओळीचें एक स्थान सोडून दुसरे ओळीचा आरंभ करावा. त्याप्रमाणें प्रतिओळीस एक एक स्थान सोडून. असें पुढें ही, म्हणजे सरूप रकमा एकाखालीं एक येऊन मिळवणीसमयीं श्रम पडणार नाहीं:

बहुतकरून संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहिता-

त कीं, संयुक्त पदें सांखळींत लिहून मध्यें गुणाकाराचें चिन्ह मात्र लिहितात.

जसें (अ+ब)×(अ−ब)×३अब. अथवा याप्रमाणें. अ+ब·अ−ब·३अब.

उदाहरणें.

पहिलें, १० अक त्यास २अ त्यांनीं गुण.

गुणाकार, २०$अ^{२}$क

दुसरें, ३$अ^{२}$−२ब त्यांस ३ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९$अ^{२}$ब−६$ब^{२}$

तिसरें, ३अ+२ब त्यांस ३अ−२ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९$अ^{२}$−४$ब^{२}$

चवथें, $क्ष^{२}$−क्षय+$य^{२}$ त्यांस क्ष+य त्यांनीं गुण.

गुणाकार, $क्ष^{३}$+$य^{३}$

पांचवें, $अ^{३}$+$अ^{२}$ब+अ$ब^{२}$+$ब^{३}$ त्यांस अ−ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, $अ^{४}$−$ब^{४}$

साहावें, $अ^{२}$+अब+$ब^{२}$ त्यांस $अ^{२}$−अब+$ब^{२}$ त्यांनीं गुण.

सातवें, $क्ष^{२} - २क्षय + ५$ त्यांस $क्ष^{२} + २क्षय - ५$ त्यांनीं गुण.

आठवें, $२अ^{२} - २अक्ष + ५क्ष^{२}$ त्यांस $३अ^{२} - ४अक्ष - ७क्ष^{२}$ त्यांनीं गुण.

नववें, $२क्ष^{२} + २क्षय^{२} + २य^{२}$ त्यांस $२क्ष - २क्षय - २य$ त्यांनीं गुण.

दाहावें $अ^{२} + अब + ब^{२}$ त्यांस $अ - २ब$ त्यांनीं गुण.

भागाकार.

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणाकाराचे उलटा आहे, आणि अंकगणिताप्रमाणेंच डावेकडून उजवेकडे भागीत जावें. भाज्य निःशेष भागिला जाईल तर वर सांगितल्या रीतीनें भागून भागाकार लिहावा. तसें न होईल तर व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें वर भाज्य लिहून खालीं भाजक लिहावा. त्यांत ही होईल तर संक्षेप करावा आणि लिहावा. त्याचे प्रकार आहेत ते सांगतों.

प्रथमप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोन ही एकाकी आहेत

अंकगणिताप्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें भाज्याचे खालीं अशा तऱ्हेनें दोनही रकमा लिहाव्या, नंतर भाज्यभाजकांचा होईल तेवढा संक्षेप करावा. त्याची रीति ही आहे कीं, त्या दोन रकमांत जीं साधारण अक्षरें असतील तीं दोनही रकमांतून रद्द करावीं, नंतर भाजक वेळाप्रकाशकानें भाज्य वेळाप्रकाशक भागावा. अथवा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें त्या दोहोंच्या दृढभाजकानें भागून संक्षेप करावा.

भाज्य आणि भाजक त्यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागाकार (−) ऋण होतो.*

---

* म्हणून पाहा भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणिले असतां भाज्य सिद्ध होतो याजकरितां.

१ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार निश्चित (+) धन होईल. कारण, धन भाजक धन भागाकारानें गुणिला असतां गुणाकार भाज्य धन होतो.

२ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (−) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार (+) ध होईल. कारण, ऋण भाजक ऋण भागाकारानें गुणिला तर गुणाकार भाज्य (+) धन होतो.

३ जेव्हां भाज्य आणि भाजक त्यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे तेव्हां भागाकार निश्चित (−) ऋण होईल. कारण, धन भाजक ऋण भाजकानें

उदाहरणें.

प्रथम, ६अब त्यांस ३अ त्यांनीं भाग.

आतां ६अब ÷ ३अ. अथवा ३अ) ६अब (अथवा $\frac{\text{६अब}}{\text{३अ}}$ = २ब.

दुसरें, क ÷ क = $\frac{\text{क}}{\text{क}}$ = १ आणि अबक्ष ÷ बक्षय = $\frac{\text{अबक्ष}}{\text{बक्षय}}$ = $\frac{\text{अ}}{\text{य}}$

तिसरें, १६क्ष^{२} त्यांस ८क्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, २क्ष

चवथें, १२अ^{२}क्ष^{२} त्यांस −३अ^{२}क्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, −४क्ष

पांचवें, −१५अय^{२} त्यांस ३अय त्यांनीं भाग.

भागाकार, −५य

साहावें, −१८अक्ष^{२}य त्यांस −८अक्षज्ञ त्यांनीं भाग.

भागाकार, $\frac{\text{९क्षय}}{\text{४ज्ञ}}$

गुणिला तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो. अथवा ऋण भाजक धन भाजकानें गुणिला तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो.

यांतून दिसतें कीं, भाज्यभाजकांचीं सरूप चिन्हें भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्यभाजकांचीं विरूप चिन्हें भागाकारास (−) ऋण करितात ही सामान्य रीति होय.

दुसराप्रकार.

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे.

रीति.

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीतीप्रमाणें भाजकानें वेगळ्या त्या भागाव्या.

उदाहरणें.

पाहिलें, (अब+ब^{२})÷२ब, अथवा $\frac{\text{अब+ब}^{२}}{\text{२ब}}=\frac{\text{अ+ब}}{\text{२}}$ $=\frac{१}{२}$अ+$\frac{१}{२}$ब.

दुसरें, (१०अब+१५अक्ष)÷५अ, अथवा $\frac{\text{१०अब+१५अक्ष}}{\text{५अ}}$=२ब+३क्ष.

तिसरें, (३०अज्ञ−४८ज्ञ)÷ज्ञ, अथवा $\frac{\text{३०अज्ञ−४८ज्ञ}}{\text{ज्ञ}}$ भागाकार, ३०अ−४८

चवथें, ५अब−८अक्ष+अ त्यांस २अ त्यांनीं भाग.

पांचवें, ३क्ष^{२}−१५+६क्ष+६अ त्यांस ३क्ष त्यांनीं भाग.

साहावें, ६अबक+१२अबक्ष−९अ^{२}ब त्यांस ३अब त्यांनीं भाग.

सातवें, १० अ^{2}क्ष - १५ क्ष^2 - २५ क्ष त्यांस ५ क्ष त्यांनीं भाग.

आठवें, १५ अ^{2}बक - १५ अकक्ष^2 + ५ अड^2 त्यांस - ५ अक त्यांनीं भाग.

नववें, १५ अ + ७ अय - १८ य^2 त्यांस ७ अ त्यांनीं भाग.

दाहावें, - २० डेब^2 + ६० अब^2 त्यांस - ६ अब त्यांनीं भाग.

तिसरा प्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोन ही संयुक्त पदेंच आहेत.

रीति.

१ अंकगणितरीतीनें भाज्य भाजक लिहावे, म्हणजे प्रथम भाजक लिहावा, नंतर भाज्य लिहावा. आतां त्या दोहोंचे मध्यें एक वांकडी रेघ करावी, आणि दोहोंत अक्षर जिन्हें असतील तीं मोठे घातापासून उतरतीं लिहावीं.

२ भाज्याचें पहिलें पद भाजकाचे पहिले पदानें प्रथम

प्रकाराप्रमाणें भागावें, आणि भागाकार येईल तो भागाकारस्थळीं लिहावा.

३ त्या भागाकारानें सर्व भाजकपदें गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा.

४ नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खालीं घेऊन पुनः पूर्वप्रमाणें भागावें. त्याप्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें; असें शेवटपर्यंत करावें; जसें अंकगणितांत करितात.

टीप. जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाहींत र तें पद व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें लिहावें; जशी अंकगणितांत बाकी लिहितात.

उदाहरणें.

$अ-क)\ अ^{३}-४अ^{२}क+४अक^{२}-क^{३}\ (अ^{२}-३अक+क^{२}$

$\underline{अ^{३}-अ^{२}क}$

$*\ -३अ^{२}क+४अक^{२}$

$\underline{-३अ^{२}क+३अक^{२}}$

$*\ +अक^{२}-क^{३}$

$\underline{+अक^{२}-क^{३}}$

$*\ \ *$

अ-ब) अ^{2}-२अब+ब^{2} (अ-ब भागाकार.
अ^{2}- अब
* - अब+ब^{2}
\- अब+ब^{2}
* *

अ-२) अ^{3}-६अ^{2}+१२अ-८ (अ^{2}-४अ+४ भागाकार.
अ^{3}-२अ^{2}
*-४अ^{2}+१२अ
-४अ^{2}+८अ
* +४अ-८
+४अ-८
* *

अ+ज्ञ) अ^{3}+ज्ञ^{3} (अ^{2}-अज्ञ+ज्ञ^{2} भागाकार.
अ^{3}+अ^{2}ज्ञ
*-अ^{2}ज्ञ+ज्ञ^{3}
\-अ^{2}ज्ञ-अज्ञ^{2}
* +अज्ञ^{2}+ज्ञ^{3}
+अज्ञ^{2}+ज्ञ^{3}
* *

$अ+२क्ष)\;अ^{२}+४अक्ष+४क्ष^{२}\;(अ+२क्ष$ भागाकार.

$\underline{अ^{२}+२अक्ष}$

$○+२अक्ष+४क्ष^{२}$

$\underline{+२अक्ष+४क्ष^{२}}$

$○\quad ○$

$अ+क्ष)\;अ^{४}-३क्ष^{४}\;(अ^{३}-अ^{२}क्ष+अक्ष^{२}-क्ष^{३}-\frac{२क्ष^{४}}{अ+क्ष}$ भागाकार

$\underline{अ^{४}+अ^{३}क्ष}$

$○-अ^{३}क्ष-३क्ष^{४}$

$\underline{-अ^{३}क्ष-अ^{२}क्ष^{२}}$

$○+अ^{२}क्ष^{२}-३क्ष^{४}$

$\underline{+अ^{२}क्ष^{२}+अक्ष^{३}}$

$○-अक्ष^{३}-३क्ष^{४}$

$\underline{-अक्ष^{३}-क्ष^{४}}$

$○-२क्ष^{४}$

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, $अ^{२}+४अक्ष+४क्ष^{२}$ त्यांस $अ+२क्ष$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $अ+२क्ष$

दुसरें, $अ^{३}+३अ^{२}ज्ञ+३अज्ञ^{२}-ज्ञ^{३}$ त्यांस $अ-ज्ञ$ त्यांनीं

भाग..

उत्तर, $अ^{२}-२अज्ञ+ज्ञ^{२}$.

तिसरें, १ त्यास $१+अ$ त्यांनी भाग.

उत्तर, $१-अ+अ^{२}-अ$ इत्यादि अनंत.

चवथें, $१२क्ष^{४}-१९२$ त्यांस $३क्ष-६$ त्यांनी भाग.

उत्तर, $४क्ष^{३}+८क्ष^{२}+१६क्ष+३२$.

पांचवें, $अ^{५}-५अ^{४}ब+१०अ^{३}ब^{२}-१०अ^{२}ब^{३}+५अब^{४}-ब^{५}$ त्यांस $अ^{२}-२अब+ब^{२}$ त्यांनी भाग.

उत्तर, $अ^{३}-३अ^{२}ब+३अब^{२}-ब^{३}$

साहावें, $४८ज्ञ^{३}-९६अज्ञ^{२}-६४अ^{२}ज्ञ+१५०अ^{३}$ त्यांस $२ज्ञ-३अ$ त्यांनी भाग.

सातवें, $ब^{६}-३ब^{४}क्ष^{२}+३ब^{२}क्ष^{४}-क्ष^{६}$ त्यांस $ब^{३}-३ब^{२}क्ष+३बक्ष^{२}-क्ष^{३}$ त्यांनी भाग.

आठवें, $अ^{५}-क्ष^{५}$ त्यांस $अ-क्ष$ त्यांनी भाग.

नववें, $अ^{३}+५अ^{२}क्ष+५अक्ष^{२}+क्ष^{३}$ त्यांस $अ+क्ष$ त्यांनी भाग.

दाहावें, $अ^{३}+४अ^{२}ब-३२ब^{३}$ त्यांस $अ+२ब$ त्यांनी भाग.

अकरावें, $२४अ^{४}-ब^{४}$ त्यांस $३अ-२ब$ त्यांनी भाग.



अपूर्णबीजगणित.

अपूर्णबीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकगणिताप्रमाणेंच आहेत, हें पुढें सांगतों त्या प्रकारावरून कळेल.

पहिला प्रकार.

भागानुबंध पूर्णबीजास विषम अपूर्णबीजाचें रूप द्यावयाचा

रीति.

पूर्ण बीज अपूर्णबीजाचे छेदांनीं गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे चिन्हांनीं जोडून वर लिहावे, आणि त्याला छेद लिहावे म्हणजे विषम अपूर्णबीजाचें रूप झालें

उदाहरणें.

पहिलें, $३\frac{४}{५}$ आणि $अ - \frac{ब}{क्ष}$ ह्या दोहोंस विषम अपूर्णबीजाचें रूप दे.

$३\frac{४}{५} = \frac{३ \times ५ + ४}{५} = \frac{१५ + ४}{५} = \frac{१९}{५}$ हें उत्तर.

$अ - \frac{ब}{क्ष} = \frac{अ \times क्ष - ब}{क्ष} = \frac{अक्ष - ब}{क्ष}$ हें उत्तर.

दुसरें, $अ+\frac{अ^२}{ब}$ आणि $अ-\frac{ह^२-अ^२}{अ}$ त्या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

$अ+\frac{अ^२}{ब}=\frac{अ\times ब+अ^२}{ब}=\frac{अब+अ^२}{ब}$ हें उत्तर.

$अ-\frac{ह^२-अ^२}{अ}=\frac{अ^२-ह^२+अ^२}{अ}=\frac{२अ^२-ह^२}{अ}$ हें उत्तर.

तिसरें, $५\frac{३}{७}$ त्यांस विषम अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{३८}{७}$

चवथें, $१-\frac{३अ}{क्ष}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{क्ष-३अ}{क्ष}$

पांचवें, $२अ-\frac{३अक्ष+अ^२}{४क्ष}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{५अक्ष+अ^२}{४क्ष}$

साहावें, $१२+\frac{४क्ष-१८}{५क्ष}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{६४क्ष-१८}{५क्ष}$

सातवें, $क्ष+\frac{१-३अ-क}{क}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{कक्ष+१-३अ-क}{क}$

आठवें, $४+२क्ष-\frac{२क्ष^२+३अ}{५अ}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{१७अ+१०अक्ष-२क्ष^२}{५अ}$



दुसरा प्रकार.

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप द्यावयाचा.

रीति.

पूर्णबीज निघावयाकरितां अंशांस छेदांनीं भागावें आणि कांहीं बाकी राहिली तर ती भागाकाराचे बाजूस लिहून तिचे खालीं छेद लिहावे.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{\text{१६}}{\text{३}}$ आणि $\frac{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

$$\frac{\text{१६}}{\text{३}}=\text{१६}\div\text{३}=\text{५}\tfrac{\text{१}}{\text{३}}\ \text{हें उत्तर}$$

$$\frac{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}=\overline{\text{अब}+\text{अ}^{\text{२}}}\div\text{ब}=\text{अ}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\text{ब}}\ \text{हें उत्तर}$$

दुसरें, $\frac{\text{२अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}$ आणि $\frac{\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

$$\frac{\text{२अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}=\overline{\text{२अक}-\text{३अ}^{\text{२}}}\div\text{क}=\text{२अ}-\frac{\text{३अ}^{\text{२}}}{\text{क}}\ \text{हें उत्तर.}$$

$$\frac{\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}=\text{३अक्ष}+\text{४क्ष}\div\text{अ}+\text{क्ष}=\text{३क्ष}+\frac{\text{क्ष}^{\text{२}}}{\text{अ}+\text{क्ष}}\ \text{हें उत्तर.}$$

तिसरें, $\frac{३३}{५}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष^२}{अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

उत्तर, $६\frac{३}{५}$ आणि $२क्ष-\frac{३क्ष^२}{अ}$

चवथें, $\frac{४अ^२क्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ^२+२ब^२}{अ-ब}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

उत्तर, २अक्ष आणि $२अ+२ब+\frac{४ब^२}{अ-ब}$

पांचवें, $\frac{३क्ष^२-२य^२}{क्ष+य}$ आणि $\frac{२क्ष^२-२य^२}{क्ष-य}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीज रूप दे.

साहावें, $\frac{१०अ^२-४अ+६}{५अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

सातवें, $\frac{१५अ^३+५अ^२}{३अ^३+२अ^२-२अ-४}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे

तिसरा प्रकार.

अपूर्णबीजास समच्छेद करायाचा.

रीति.

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्व पदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे, आणि समच्छेद होण्याकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.

जेव्हां सर्व छेद कोणत्याही एका अंकानें अथवा बीजानें भागिले जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा, नंतर पूर्वप्रमाणें करावें; आणि त्या प्रकरणीं अपूर्णांकगणितांत ज्या रीति सांगितल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{ज्ञ}$ त्यांस समच्छेदरूप दे

आतां $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{ज्ञ} = \frac{अज्ञ}{क्षज्ञ}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षज्ञ}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{क्ष}$, $\frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

आतां $\frac{अ}{क्ष}, \frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क} = \frac{अबक}{क्षबक}, \frac{क्ष^2क}{क्षबक}$ आणि $\frac{ब^2क्ष}{क्षबक}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{क्ष}$ आणि $\frac{३ब}{२क}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२कक्ष}$ आणि $\frac{३बक्ष}{२कक्ष}$

चवथें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{३अ+२ब}{२क}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२बक}$ आणि $\frac{३अब+२ब^{२}}{२बक}$

पांचवें, $\frac{५अ}{३क्ष}$, $\frac{३ब}{२क}$ आणि ४ड त्यांस समच्छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{१०अक}{६कक्ष}$ $\frac{९बक्ष}{६कक्ष}$ आणि $\frac{२४कडक्ष}{६कक्ष}$

साहावें, $\frac{५}{६}$ $\frac{३अ}{४}$, आणि २ब + $\frac{३अ}{ब}$ त्यांस समछेद रूप दे.

उत्तर, $\frac{२०ब}{२४ब}$ $\frac{१८अब}{२४ब}$ आणि $\frac{४८ब^{२}+७२अ}{२४ब}$

सातवें, $\frac{१}{३}$ $\frac{२अ^{२}}{४}$ आणि $\frac{२अ^{२}+ब^{२}}{अ+ब}$ त्यांस समच्छेदरूप दे

आठवें, $\frac{३ब}{४अ^{२}}$ $\frac{२क}{३अ}$ आणि $\frac{ड}{२अ}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

चौथा प्रकार.

अपूर्ण बीजाचे पदांचा दृढभाजक काढायाचा.

रीति.

मोठें पद लहानपदानें भागावें, बाकी राहील तो भाजक कल्पून त्यानें पूर्वभाजकास भागावें. त्याप्रमाणें बाकी ० शून्य होई तोंपर्यंत करावें. शेवटील भाजक दृढभाजक होय.

टीप. भाजकपदांमध्यें जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील तीं परस्पर भागून रद्द करावीं, नंतर दृढभाजक काढावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{\text{अब}+\text{ब}^{२}}{\text{अक}^{२}+\text{बक}^{२}}$ ह्यांचा दृढभाजक काढ.

अब+ब^{२}) अक^{२}+बक^{२}

अथवा अ+ब) अक^{२}+बक^{२} (क^{२}

अक^{२}+बक^{२}

* *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{\text{अ}^{३}-\text{अब}^{२}}{\text{अ}^{२}+२\text{अब}+\text{ब}^{२}}$ ह्यांचा दृढभाजक काढ.

अ^{२}+२अब+ब^{२}) अ^{३}-अब^{२} (अ

अ^{३}+२अ^{२}ब+अब^{२}

* -२अ^{२}ब-२अब^{२}) अ^{२}+२अब+ब^{२}

अथवा अ+ब) अ^{२}+२अब+ब^{२} (अ+ब

अ^{२}+अब

* अब+ब^{२}

अब+ब^{२}

* *

एथें $अ+ब$ हा दृढभाजक आहे, हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{अ^{२}-४}{अब+२ब}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

उत्तर, $अ-२$

चवथें, $\frac{अ^{४}-अ^{२}ब^{२}}{अ^{२}-ब^{२}}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

उत्तर, $अ^{२}-ब^{२}$

पाचवें, $\frac{अ^{३}स+३अ^{२}स^{२}+३अस^{३}+स^{४}}{५अ^{४}+१०अ^{३}स+५अ^{२}स^{२}}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

पांचवा प्रकार.

अपूर्णबीजाचा संक्षेप करावयाचा.

रीति.

पूर्वप्रकाराप्रमाणें पदांचा दृढभाजक काढून त्यानें सर्व पदें भागावीं, भागाकार येईल तो संक्षेप झाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब^{२}}{अक^{२}+बक^{२}}$ त्यांचा संक्षेप कर.

$अब+ब^{२})अक^{२}+बक^{२}$

अथवा $अ+ब)अक^{२}+बक^{२}(क^{२}$

$अक^{२}+बक^{२}$

* . *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, त्याजकरितां

$अ+ब)\frac{अब+ब^{२}}{अक^{२}+बक^{२}}=\frac{ब}{क^{२}}$ हा संक्षेप झाला, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{क^{३}-ब^{२}क}{क^{२}+२बक+ब^{२}}$ ह्यांचा संक्षेप कर.

$क^{२}+२बक+ब^{२})\,क^{३}-ब^{२}क\,(क$

$क^{३}+२बक^{२}+ब^{२}क$

$*\;-२बक^{२}-२ब^{२}क$

$क+ब)\,क^{२}+२बक+ब\,(क+ब$

$क^{२}+बक$

$*\;-बक+ब^{२}$

$बक+ब^{२}$

$*\quad *$

एथें क+ब हा दृढभाजक आहे, त्याजकरितां

$क+ब)\frac{क^{३}-ब^{२}क}{क^{२}+२बक+ब^{२}}=\frac{क^{२}-बक}{क+ब}$ हा संक्षेप झाला.

तिसरें, $\frac{क^{३}-ब^{३}}{क^{३}-ब^{२}क}$ ह्यांचा संक्षेप कर.

उत्तर, $\frac{क^{२}+बक+ब^{२}}{क^{२}+बक}$

चवथें, $\frac{अ^{४}-ब^{४}}{अ^{३}-ब^{३}}$ ह्यांचा संक्षेप कर.

उत्तर, $\frac{१}{अ+ब}$

पांचवें $\frac{अ^{२}-ब^{२}}{अ^{३}-३अ^{२}ब+३अब^{२}-ब^{३}}$ त्यांचा संक्षेप कर.

साहावें, $\frac{३अ^{५}+६अ^{४}क+३अ^{३}क^{२}}{अ^{३}क+३अ^{२}क^{२}+३अक^{३}+क^{४}}$ त्यांचा संक्षेप कर.

सातवें, $\frac{अ^{२}-अब}{अ^{२}+२अब+ब^{२}}$ त्यांचा संक्षेप कर

साहावा प्रकार.

अपूर्णबीजाची मिळवणी करावयाचा.

रीति.

अपूर्णबीजपदांचे छेद सम असल्यास सर्व अंशांची बेरीज घ्यावी, आणि त्या बेरजेखालीं समच्छेद लिहावे म्हणजे मिळवणी झाली.

ते छेद सम नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगितल्याप्रमाणें करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

एथें $\frac{अ}{३}+\frac{अ}{४}=\frac{४अ}{१२}+\frac{३अ}{१२}=\frac{७अ}{१२}$ ही बेरीज. हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{ब}$ $\frac{ब}{क}$ आणि $\frac{क}{ड}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

एथें $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{क}+\frac{क}{ड}=\frac{अकड}{बकड}+\frac{ब^{२}ड}{बकड}+\frac{बक^{२}}{बकड}=\frac{अकड+ब^{२}ड+बक^{२}}{बकड}$ ही बेरीज झाली. हें उत्तर.

तिसरें,* $अ-\frac{३स^{२}}{ब}$ आणि $ब+\frac{२अस}{क}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

एथें $अ-\frac{३स^{२}}{ब}+ब+\frac{२अस}{क}=अ-\frac{३कस^{२}}{बक}+ब+\frac{२अबस}{बक}=$ $अ+ब+\frac{२अबस-३कस^{२}}{बक}$ ही बेरीज. हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४स}{३अ}$ आणि $\frac{२स}{५ब}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

---

* भागानुबंध पूर्णबीजांची मिळवणी करितेसमयीं ही रीति सर्वांहून उत्तम आहे कीं, अपूर्णबीजांचे मात्र अवयव समच्छेद करून मिळवणी करावी, नंतर पूर्णबीजाची मिळवणी करून त्या अपूर्ण बीजांचे बेरजेस जोडून लिहावी.

उत्तर, $\frac{२०बक्ष+६अक्ष}{१५अब}$

पांचवें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{अ}{४}$ आणि $\frac{अ}{५}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{४७अ}{६०}$

साहावें, $\frac{२अ-३}{४}$ आणि $\frac{५अ}{८}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{९अ-६}{८}$

सातवें, $२अ+\frac{अ+३}{५}$ आणि $४अ+\frac{२अ-५}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $६अ+\frac{१४अ-१३}{२०}$

आठवें, ६अ आणि $\frac{३अ^{२}}{४ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{३ब}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

नवें, $\frac{५अ}{४}$ $\frac{६अ}{५}$ आणि $\frac{३अ+२}{७}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

दाहावें, $२अ\frac{३अ}{४}$ आणि $३+\frac{अ}{६}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

अकरावें, $८अ+\frac{३अ}{४}$ आणि $२अ-\frac{५अ}{८}$ त्यांची मिळवणी काय होती?



सातवा प्रकार.

एका अपूर्णबीज पदास दुसऱ्यांतून वजा करायाचा रीति.

अपूर्णबीज समछेद नसल्यास मिळवणीप्रमाणें त्यास समछेद करावे. नंतर अंशांची वजाबाकी करून त्या बाकी-खालीं समछेद लिहावे, म्हणजे वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४अ}{७}$ त्यांची वजाबाकी कर.

एथें $\frac{३अ}{४} - \frac{४अ}{७} = \frac{२१अ}{२८} - \frac{१६अ}{२८} = \frac{५अ}{२८}$ बाकी, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{२अ-ब}{४क}$ आणि $\frac{३अ-४ब}{३ब}$ त्यांची वजाबाकी कर.

एथें $\frac{२अ-ब}{४क} - \frac{३अ-४ब}{३ब} = \frac{६अब-३ब^२}{१२बक} - \frac{१२अक-१६बक}{१२बक} =$

$\frac{६अब-३ब^२-१२अक+१६बक}{१२बक}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{१०अ}{९}$ आणि $\frac{४अ}{७}$ त्यांची वजाबाकी कर.

चवथें, ६अ आणि $\frac{३अ}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर.

पांचवें, $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{३}$ त्यांची वजाबाकी कर.

साहावें, $\frac{३अ+क}{ब}$ यांतून $\frac{१ब}{क}$ हे वजाकर.

सातवें, $\frac{४अ+८}{५}$ यांतून $\frac{२अ+६}{९}$ हे वजा कर.

आठवें, $४अ+\frac{३अ}{क}$ यांतून $२अ-\frac{अ-३ब}{क}$ हे वजा कर.

आठवा प्रकार.

अपूर्णबीजपदें परस्पर गुणायाचा.

रीति.

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदांकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.*

---

* १ जेव्हां एक अपूर्णबीजपदाचे अंश आणि दुसऱ्या अपूर्णबीजपदाचे छेद यांचा दृढभाजक मिळेल तेव्हां त्यानें संक्षेप करावा.

२. जेव्हां अपूर्णबीजासंगातीं पूर्णबीज गुणायाचें आहे, तेव्हां गुणाकार त्याप्रमाणें होतो. पूर्णबीजानें अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे; आणि जर पूर्णबीज आणि छेद एकच सरूप आहेत, तर अंशसिद्धच गुणाकार आहे

उदाहरणें

पहिलें, $\frac{अ}{८}$ आणि $\frac{२अ}{५}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ\times २अ}{८\times ५} = \frac{२अ^{२}}{४०} = \frac{अ^{२}}{२०}$ हा गुणाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{६अ}{७}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ\times ३अ\times ६अ}{३\times ४\times ७} = \frac{१८अ^{३}}{८४} = \frac{३अ^{३}}{१४}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{२अ+क}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{२अ\times(अ+ब)}{ब\times(२अ+क)} = \frac{२अ^{२}+२अब}{२अब+बक}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४अ}{क}$ आणि $\frac{६अ}{५क}$ हे परस्पर गुण.

पाचवें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४ब^{२}}{३अ}$ हे परस्पर गुण.

साहावें, $\frac{३अ}{ब}$ आणि $\frac{८अक}{ब}$ आणि $\frac{४अब}{३क}$ हे परस्पर गुण.

सातवें $३अ+\frac{अब}{२क}$ आणि $\frac{३अ^{२}}{ब}$ हे परस्पर गुण.

आठवें, $\frac{२अ^{२}-२ब^{२}}{१बक}$ आणि $\frac{४अ^{२}+२ब^{२}}{अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

नववें, १ अ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

दाहावें, $अ+\frac{क्ष}{२अ}-\frac{क्ष^{२}}{८अ^{३}}$. त्यांस $क्ष-\frac{अ}{२क्ष}+\frac{अ^{२}}{४क्ष^{२}}$, त्यांनीं गुण.

नववा प्रकार

एक अपूर्णबीज पदास दुसऱ्यानें भागायाचा.

रीति.

एकाचे अंश दुसऱ्याचे अंशांनीं भागावे, आणि छेद छेदांनीं भागावे, जर निःशेष भागिले जातील. तसें न होईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदल करून गुणाकार रीतीनें भाज्य भाजक गुणावे.*

उदाहरणें.

---

* १ जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशांकरितां त्याचे अंश घ्यावे, आणि भागाकाराचे छेदांकरितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

पहिलें, $\frac{अ}{४}$ त्यांस $\frac{३अ}{८}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{अ}{४} \div \frac{३अ}{८} = \frac{अ}{४} \times \frac{८}{३अ} = \frac{८अ}{१२अ} = \frac{२}{३}$ भागाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३अ}{२ब}$ त्यांस $\frac{५क}{४ड}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ}{२ब} \div \frac{५क}{४ड} = \frac{३अ}{२ब} \times \frac{४ड}{५क} = \frac{१२अड}{१०बक}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब}$ त्यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{८अ^{२}+६अब+ब^{२}}{९अ^{२}-४ब^{२}}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३अ^{२}}{अ^{३}+ब^{३}}$ त्यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ^{२}}{अ^{३}+ब^{३}} \times \frac{अ+ब}{अ} = \frac{३अ^{२} \times (अ+ब)}{(अ^{३}+ब^{३}) \times अ} = \frac{३अ}{अ^{२}-अब+ब^{२}}$ भागाकार, हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{३क्ष}{४}$ त्यांस $\frac{११}{१२}$ त्यांनीं भाग.

साहावें, $\frac{६क्ष^{२}}{५}$ त्यांस ३क्ष त्यांनीं भाग.

सातवें, $\frac{३क्ष+१}{८}$ त्यांस $\frac{४क्ष}{३}$ त्यांनीं भाग.

---

२ जेव्हां अपूर्णबीज कोणते ही पदानें भागायाचें आहे, तेव्हां त्या पदानें अंशा भागिले, अथवा छेद गुणिले, या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो.

३ जेव्हां दोनही अंशांचा अथवा दोनही छेदांचा दृढभाजक मिळतो, तेव्हां त्यानें संक्षेप करून, नंतर पूर्वप्रकारें भागावें.

आठवें, $\frac{४क्ष}{२क्ष-१}$ त्यांस $\frac{क्ष}{२}$ त्यांनीं भाग.

नववें, $\frac{४क्ष}{५}$ त्यांस $\frac{३अ}{५ब}$ त्यांनीं भाग.

दाहावें, $\frac{२अ-ब}{४कड}$. त्यांस $\frac{५अक}{६ड}$ त्यांनीं भाग.

अकरावें, $\frac{५अ^{२}-५ब^{२}}{२अ^{२}-४अब+२ब^{२}}$ त्यांस $\frac{६अ^{२}+५अब}{४अ-४ब}$ त्यांनीं भाग.

बीजवर्गघनादि.

बीजवर्गघनादि म्हणजे सांगितलें मूळबीज फिरून फिरून त्याच मूळबीजानें गुणून वाढविलें बीज. जसें कोणत्याही सांगितल्या पदाचा वर्ग काय होतो तो शोधायाचा. तसाच घन चतुर्घात इत्यादिक. त्याची रीति पुढें सांगतों.

*सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्यानेंच प्रकाशकसं

---

* एक अथवा अनेक पदें आहेत, त्यांचे गुणाकारानें वर्गादिक त्या पदांचे वेगळाले त्या त्या वर्गादिकांचे गुणाकाराबराबर आहे. जसा या तीन पदांचे गुणाकाराचा वर्ग.

ल्यांत एक कमीवेळापर्यंत पुनःपुनः गुणावे, शेवटील गुणाकार इछिले वर्गघनादिक होईल. अथवा सांगितल्या मुळांत किंवा पदांत अक्षरचिन्हेंच असलीं तर त्या रीतीनें करावे, त्या अक्षरचिन्हांचा मूळप्रकाशक इछिले वर्गघनादिप्रकाशकानें गुणून जो गुणाकार येईल तें इछिलें वर्गघनादिक होईल, आणि वेळाप्रकाशकही एक मूळच होय, त्यास्तव त्याचेंही वर्गादिप्रकाशकाप्रमाणें वर्गादिक करावे.

टीप. जेव्हां सांगितले मूळाचें कार्यप्रकाशक चिन्ह (+) धन आहे, तेव्हां त्यापासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन

$\overline{३\times५\times७}^{२} = ११०२५$, आणि $३^{२}\times५^{२}\times७^{२} = ९\times२५\times४९ = ११०२५$

आणि अपूर्णबीजाचें कोणतेंही वर्गादिक त्या अपूर्णबीजाचे अंशांचे वर्गादिकछेदांचे, तसेंच वर्गादिकानें भागिलें याचे बराबर आहे.

जसा या अपूर्णबीजाचा घन $\left(\frac{२अ}{अ}\right)^{३} = २^{३} = ८$

आणि $\frac{२^{३}अ^{३}}{अ^{३}} = २^{३} = ८$

आणि एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूळादि परस्पर गुणायाचें आहे तर त्या गुण्यगुणकाचे वर्गादिकप्रकाशकांची बेरीज घेऊन त्या पदावर प्रकाशकस्थळीं लिहावी. जसें, $अ^{३}\times अ^{२} = अ^{३+२} = अ^{५}$. $अ^{४}\times अ^{२} = अ^{४+२} = अ^{६}$

तसेंच एकच पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूळादिक परस्पर भागायाचें आहे तर त्या भाज्यभाजकांचे वर्गादिकप्रकाशकांची वजाबाकी करून त्या पदावर प्रकाशकस्थळीं लिहावी. जसें, $अ^{३}\div अ^{२} = अ^{३-२} = अ$ $अ^{६}\div अ^{२} = अ^{६-२} = अ^{४}$

होईल. परंतु जेव्हां त्या सांगितले मुळाचें कार्यप्रकाशक चिन्ह (-) ऋण आहे, तेव्हां त्या पासून जें वर्गघनादिक करायाचें तें वर्गादिप्रकाशक सम असेल त्या स्थळीं धन होईल, आणि तो विषम असेल त्या स्थळीं ऋण होईल. हें सर्व गुणाकार-रीतीनें जाणावें.

उदाहरणें.

अ = हें एक मूळ आहे.	अ^{२} = हें एक मूळ आहे.
अ^{२} = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.	अ^{४} = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.
अ^{३} = हा त्याच मुळाचा घन होय.	अ^{६} = हा त्या मुळाचा घन होय.
अ^{४} = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.	अ^{८} = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
अ^{५} हा त्या मुळाचा पंचघात.	अ^{१०} = हा त्या मुळाचा पंचघात.
इत्यादि.	इत्यादि.
-२अ = हें एक मूळ आहे.	-३अब^{२} = हें एक मूळ आहे.
+४अ^{२} = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.	+९अ^{२}ब^{४} = हा त्या मुळाचा वर्ग.
-८अ^{३} = हा त्या मुळाचा घन होय.	-२७अ^{३}ब^{६} = हा त्या मुळाचा घन.
+१६अ^{४} = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.	+८१अ^{४}ब^{८} = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
-३२अ^{५} = हा त्या मुळाचा पंचघात.	-२४३अ^{५}ब^{१०} = हा त्या मुळाचा पंचघात.
इत्यादि.	इत्यादि.

$-\frac{२अक्ष^{२}}{३ब}$ = हें एक मूळ आहे.
$+\frac{४अ^{२}क्ष^{४}}{९ब^{२}}$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.
$-\frac{८अ^{३}क्ष^{६}}{२७ब^{३}}$ = हा त्या मुळाचा घन.
$+\frac{१६अ^{४}क्ष^{८}}{८१ब^{४}}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
इत्यादि.

$\frac{अ}{२ब}$ = हें एक मूळ आहे.
$\frac{अ^{२}}{४ब^{२}}$ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.
$\frac{अ^{३}}{८ब^{३}}$ = हा त्या मुळाचा घन होय.
$\frac{अ^{४}}{१६ब^{४}}$ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
इत्यादि.

क्ष − अ = हें एक मूळ आहे.

$$\begin{array}{l} क्ष - अ \\ \hline क्ष^{२} - अक्ष \\ \quad - अक्ष + अ^{२} \\ \hline क्ष^{२} - २अक्ष + अ^{२} \end{array}$$
= हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$$\begin{array}{l} क्ष - अ \\ \hline क्ष^{३} - २अक्ष^{२} + अ^{२}क्ष \\ \quad - अक्ष^{२} + २अ^{२}क्ष - अ^{३} \\ \hline क्ष^{३} - २अक्ष^{२} + ३अ^{२}क्ष - अ^{३} \end{array}$$
= हा त्या मुळाचा घन होय.

क्ष + अ = हें एक मूळ आहे.

$$\begin{array}{l} क्ष + अ \\ \hline क्ष^{२} + अक्ष \\ \quad + अक्ष + अ^{२} \\ \hline क्ष^{२} + २अक्ष + अ^{२} \end{array}$$
= हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

$क्ष + अ$

$क्ष^{२} + २अक्ष + अ^{२}$

$क्ष^{३} + २अक्ष^{२} + अ^{२}क्ष$

$\quad + अक्ष^{२} + २अ^{२}क्ष + अ^{३}$

$क्ष^{३} + ३अक्ष^{२} + २अ^{२}क्ष + अ^{३}$ = हा त्या मुळाचा घन होय.

हीं दोन उदाहरणें क्ष − अ आणि क्ष + अ त्या दोन मुळांचे वर्ग आणि घन दाखवितात.

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, $३अ^{२}$ त्यांचा घन काय होतो?

उत्तर $२७अ^{६}$

दुसरें, $२अ^{२}ब$ त्यांचा चतुर्घात काय होतो?

तिसरें, $-४अ^{२}ब^{३}$ त्यांचा घन काय होतो?

चवथें, $-\frac{अ^{२}क्ष}{२ब^{२}}$ त्यांचा चतुर्घात काय होतो?

पांचवें, $अ - २क्ष$ त्यांचा पंचघात काय होतो?

साहावें, $२अ^{२}$ त्यांचा षट्घात काय होतो?

सरऐजाक न्यूटन त्याची द्वियुक्पदाचें वर्गादिक करायाची.

रीति.*

१ वेळाप्रकाशकावांचून पदें करायाची, त्यांचा आरंभ द्वियुक्पदाचे प्रथम पदापासून होतो, आणि त्यास वर्गादिप्रकाशक असावा तो द्वियुक्पदाचा इच्छिल्या वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे तोच होय. आणि त्याचे पुढील पदांस वर्गादिप्र-

---

* यारीतीचें सामान्यतः हें स्वरूप आहे (न) म्हणजे कोणतीही संख्या

$(\text{अ}+\text{क्ष})^{\text{न}}=\text{अ}^{\text{न}}+\text{न}\cdot\text{अ}^{\text{न}-१}\text{क्ष}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\text{अ}^{\text{न}-२}\text{क्ष}^{२}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\text{अ}^{\text{न}-३}\text{क्ष}^{३}$ इत्यादि.

$(\text{अ}-\text{क्ष})^{\text{न}}=\text{अ}^{\text{न}}-\text{न}\cdot\text{अ}^{\text{न}-१}\text{क्ष}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\text{अ}^{\text{न}-२}\text{क्ष}^{२}-\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\text{अ}^{\text{न}-३}\text{क्ष}^{३}$ इत्यादि.

टीप. प्रत्येक पवरामध्यें वेळाप्रकाशकांची बेरीज (२) या संख्येचे प्रत्येक पवराबरोबर आहे. जसें १+१=२ हें मूळ अथवा प्रथम पवर १+२+१=४=$२^{२}$ हें वर्गस्थळ. अथवा दुसरा पवर १+३+३+१=८=$२^{३}$ हा घन अथवा तिसरा पवर, या प्रमाणें पुढेंही जाणावें.

$\text{अ}+\text{ब}$	$\text{अ}^{२}+२\text{अब}+\text{ब}^{२}$	$\text{अ}^{३}+३\text{अ}^{२}\text{ब}+३\text{अब}^{२}+\text{ब}^{३}$
१+१=२	१+२+१=४	१+३+३+१=८

$$\text{अ}^{४}+४\text{अ}^{३}\text{ब}+६\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}+४\text{अब}^{३}+\text{ब}^{४}$$

$$१+४+६+४+१=१६$$

पवर म्हणजे घातमूळ. म्हणजे एक पवर. अथवा एकघात. वर्ग म्हणजे द्विघात. घन म्हणजे त्रियात. या प्रमाणें पुढेंही जाणावें.

काशक असावा तो हाच प्रतिपदीं अनुक्रमें एक एक उणा क- रून होतो . आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्या दुसऱ्या पदास व- र्गादिप्रकाशक असावा तो शून्यापासून ०·१·२·३ त्या अनु- क्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो, तो इछिल्या वर्गा- दिप्रकाशकापर्यंत . म्हणजे, इछिल्या वर्गादिकानें प्रथम मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथम पद होईल, तें इछिल्या वर्गा- दिप्रकाशकानें युक्त, आणि त्या श्रेढीनें शेवटील पद त्यामू- ळ द्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल . तें इछिल्या वर्गा- दिप्रकाशकानें युक्त . परंतु दुसरीं अथवा मध्यपदें मूळद्वि- युक्पदाचे गुणाकार होतील . अशा रीतीनें कीं, मूळ द्वि- युक्पदाचे पहिल्या पदास प्रतिपदीं वर्गादिप्रकाशक एक एक उणा आणि दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत जाईल

२ वेळाप्रकाशक काढायाची रीति श्रेढीचे प्रथम पदाचा वेळाप्रकाशक १ आहे . दुसऱ्या पदाचा वेळाप्रकाशक तो आहे कीं, जो इछिल्या वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे. तिस- ऱ्या पदाचा वेळाप्रकाशक त्याप्रमाणें निघतो. कीं, दुसऱ्या प- दाचा वेळाप्रकाशक आणि त्याच दुसरे पदांतील पहिल्या अक्षरा चा वर्गादिप्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार

दोहोनीं भागावा, भागाकार येईल तो त्या तिसऱ्या पदाचा वेळा प्रकाशक होईल, आणि त्याप्रमाणें पुढें ही. म्हणजे शेवटीं वेळाप्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचे वर्गादिप्रकाशकानें गुणून तो गुणाकार तेंच पद कितावें असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदापुढील जवळचे पदाचा वेळाप्रकाशक होईल. त्यारीतीनें एकापुढें एक अशा सर्व पदांचा वेळाप्रकाशक निघेल.

टीप. श्रेढींतील सर्व पदांची संख्या इछिल्या वर्गादिप्रकाशकसंख्येहून एकानें अधिक होईल, आणि मूळ द्वियुक्पदांतील दोनही पदें (+) धन आहेत तर श्रेढीची सर्व पदें (+) धन होतील. परंतु जर त्या मूळद्वियुक्पदांत दुसरें पद (–) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदें (+) धन होतील, आणि समपदें (–) ऋण होतील. त्याचकारणास्तव तीं सर्व पदें (+) धन (–) ऋण (+) धन (–) ऋण अशा अनुक्रमें होतील. पुनः प्रतिपदीं त्या त्या पदांतील अक्षरांचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज इछिल्या वर्गादिकाचे प्रकाशकाबरोबर आहे, आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहोंकडील स्थळीं वर्गादिप्रकाशक बरोबर आहेत, परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे; आणि मध्यापासून दोहोंकडील बराबरस्थळीं वेळाप्रकाशक

ही बरोबर आहेत. तसें आदीपासून मध्यापर्यंत वेळाप्रकाशक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे, तितक्या तितक्या अंतरानें वेळाप्रकाशक मध्यापासून अंतापर्यंत उणा होत जातो.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{अ}+\text{क्ष}$ त्यांचा पंचघात करायाचा आहे.

प्रथम रीतीनें वेळाप्रकाशकावांचून पदें करावीं.

$$\text{अ}^{५} \quad \text{अ}^{४}\text{क्ष} \quad \text{अ}^{३}\text{क्ष}^{२} \quad \text{अ}^{२}\text{क्ष}^{३} \quad \text{अ}\text{क्ष}^{४} \quad \text{क्ष}^{५}$$

आणि दुसऱ्या रीतीनें वेळाप्रकाशक काढावे.

$$१ \quad ५ \quad \frac{५\times४}{२} \quad \frac{१०\times३}{३} \quad \frac{१०\times२}{४} \quad \frac{५\times१}{५}$$

$$१ \quad ५ \quad १० \quad १० \quad ५ \quad १$$

त्याजकरितां मूळ द्विगुणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे

$$\text{अ}^{५}+५\text{अ}^{४}\text{क्ष}+१०\text{अ}^{३}\text{क्ष}^{२}+१०\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{३}+५\text{अ}\text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{५}$$

परंतु हें उत्तम आहे कीं, वेळाप्रकाशक आणि वर्गादिप्रकाशक हे तपशिलावांचून जुळून सर्व पदें एके ओळींत लिहावीं. जसें दुसरें उदाहरण पुढें लिहितों.

दुसरें, $\text{अ}-\text{क्ष}$ त्याचा षट्घात करायाचा.

$$\text{अ}^{६}-६\text{अ}^{५}\text{क्ष}+१५\text{अ}^{४}\text{क्ष}^{२}-२०\text{अ}^{३}\text{क्ष}^{३}+१५\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{४}-६\text{अ}\text{क्ष}^{५}+\text{क्ष}^{६}$$

तिसरें, अ-क्ष त्यांचा चतुर्घात करायाचा.

$$अ^{४} - ४ अ^{३} क्ष + ६ अ^{२} क्ष^{२} - ४ अ क्ष^{३} + क्ष^{४}$$

आणि त्या रीतीनें कोणतेंही वर्गादिक सरवानें एके ओळींत लिहितां येईल.

बीजवर्गादिमूळ.

बीजवर्गादिमूळ म्हणजे वर्गादिकाची उलट सांगित त्या पदापासून त्याचें वर्गादिमूळ काढायाचें. तें पद एकाकी अथवा संयुक्त असेल.

प्रथमप्रकार.

एकाकी पदाचें मूळ काढायाचा.

अंकगणितरीतीनें वेळाप्रकाशकाचें मूळ काढावें, आणि अक्षरचिन्हाचा वर्गादिप्रकाशक इछिल्या वर्गादिमूळप्रकाशकानें भागावा, म्हणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचें मूळ होईल. नंतर हें मूळ पूर्ववेळाप्रकाशकमूळाशीं जोडलें असतां इछिलें वर्गादिमूळ होईल.*

---

* धन (+) पदाचें कोणतेंही सममूळ (+) धन अथवा (-) ऋण असेल

उदाहरणे

पहिलें, $४\text{अ}^{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर, २अ

दुसरें, $८\text{अ}^{३}$ त्यांचें घनमूळ काढ. उत्तर, २अ

तिसरें, $\frac{५\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}}{९\text{क}^{२}}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\sqrt{\frac{५\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}}{९\text{क}^{२}}}=\frac{\text{अब}}{३\text{क}}\sqrt{५}$$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{१६\text{अ}^{४}\text{ब}^{६}}{२७\text{क}^{३}}$ त्यांचें घनमूळ काढ.

उत्तर, $\frac{२\text{अब}^{२}}{३\text{क}}\sqrt[३]{२\text{अ}}$.

पांचवें, $२\text{अ}^{२}\text{ब}^{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर, $\text{अब}\sqrt{२}$

साहावें, $-६४\text{अ}^{३}\text{ब}^{६}$ त्यांचें घनमूळ काढ. उत्तर, $-४\text{अब}^{२}$

सातवें, $\frac{८\text{अ}^{२}\text{ब}^{३}}{७\text{क}^{२}}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

म्हणजे जसें $+\text{अ}^{२}$ यानें वर्गमूळ $+\text{अ}$ अथवा $-\text{अ}$ असेल. कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}=+\text{अ}^{२}$ आणि $-\text{अ}\times-\text{अ}=+\text{अ}^{२}$ आहे.

परंतु कोणत्याही पदाचें विषम मूळ त्या पदाचे चिन्हाप्रमाणें आहे. जसें $+\text{अ}^{३}$ यानें घनमूळ $+\text{अ}$ आहे आणि $-\text{अ}^{३}$ यानें घनमूळ $-\text{अ}$ आहे. कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}\times+\text{अ}=+\text{अ}^{३}$ आहे आणि $-\text{अ}\times-\text{अ}\times-\text{अ}=-\text{अ}^{३}$ आहे. कोणत्याही पदाचें सममूळ ऋण होत नाहीं. कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}$ अथवा $-\text{अ}\times-\text{अ}$ हे दोनही $-\text{अ}^{२}$ होण्यास परम अशक्य.

कोणत्याही गुणाकाराचें मूळ त्या गुण्यगुणकांचे वेगळाले मूळाचे गुणाकारा बरोबर आहे आणि अपूर्णबीजाचे मूळाची इच्छा असेल तर त्या अंशछेदांचीं वेगळालीं मुळें काढावीं: म्हणजे तीं मूळें त्या अपूर्णबीजाचें इच्छिलें मूळ होईल.

उत्तर, $\frac{२अब}{क}\sqrt{\frac{२}{३क}}$

आठवें ८१ अ^{४}ब^{६} त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, ३ अब$\sqrt{ब}$

नववें, −३२ अ^{५}ब^{७} त्यांचें पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, −२ अब$\sqrt[५]{ब^{२}}$

दुसरा प्रकार

संयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा.

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणें आहे. म्हणजे,

१ ज्या पदाचें घातांक अधिक असेल तें पद प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरतां अशा रीतीनें सर्व पदें लिहावीं. नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकारस्थळीं लिहावें.

२ त्या मुळाचा वर्ग प्रथमपदाखालीं लिहून त्यांतून वजा करावा. नंतर नवे भाज्याकरितां बाकीजवळ वरचीं दुसरीं दोन पदें घ्यावीं, आणि नवे भाजकाकरितां मुळाची दुपट करून भाजकस्थळीं लिहावीं.

३ तो भाज्य भाजकानें भागावा आणि जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि भाजकासही जोडावें

४ आतां वाढविला भाजक भागाकारखालीं जें आतां नवें लिहिलें त्यानें गुणून गुणाकार भाज्याखालीं लिहावा, आणि त्यांतून वजा करावा. त्याप्रमाणें अंकगणितरीतीनें करीत जावें.

उदाहरणे.

पहिलें, अ^4-४अ^{3}ब+६अ^{2}ब^2-४अब^3+ब^4 ह्याचें वर्गमूळ काढ.

अ^4-४अ^{3}ब+६अ^{2}ब^2-४अब^3+ब^4(अ^2-२अब+ब^2 हें वर्गमूळ,
हें उत्तर.
२अ^2-२अब)-४अ^{3}ब+६अ^{2}ब^2
-४अ^{3}ब+४अ^{2}ब^2
२अ^2-४अब+ब^2) * +२अ^{2}ब^2-४अब^3+ब^4
+२अ^{2}ब^2-४अब^3+ब^4
* * *

दुसरें अ^4+४अ^{3}ब+१०अ^{2}ब^2+१२अब^3+९ब^4 ह्याचें वर्गमूळ काढ.

अ^4+४अ^{3}ब+१०अ^{2}ब^2+१२अब^3+९ब^4(अ^2+२अब+३ब^2 हें
अ^4 वर्गमूळ हें उत्तर.

$$२अ^२+२अब)+४अ^३ब+१०अ^२ब^२$$
$$+४अ^३ब+४अ^२ब^२$$
$$२अ^२+४अब+३ब^२) \quad ※ \quad +६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$$
$$+६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$$

※ ※ ※

तिसरें, $अ^४+४अ^३+६अ^२+४अ+१$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ^२+२अ+१$

चवथें, $अ^४-२अ^३+२अ^२-अ+\frac{१}{४}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ^२-अ+\frac{१}{२}$

पांचवें, $अ^२-अब$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ-\frac{ब}{२}-\frac{ब^२}{८अ}-\frac{ब^३}{१६अ^२}$ इत्यादि.

तिसरा प्रकार

कोणत्याही वर्गादीचें मूळ काढायाचा.

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे. म्हणजे प्रथम पदाचें सांगितलें मूळ काढून तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि त्या मुळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथमपदांतून वजा करावें. नंतर नवे भाज्याकरितां वरचें दुसरें पद खालीं घ्यावें,

आणि नंवे भाजकाकरितां तें काढिलें मूळ सांगितल्या वर्गादि घातांत एक घातकमीपर्यंत वाढवून त्यास सांगितल्या वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजकस्थळीं लिहावें. आणि त्या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें. नंतर भागाकारस्थळींचें तें सर्व मूळ सांगितला वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितले सर्व वर्गादींतून वजा करावें. नंतर बाकीचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि तें भागाकारस्थळींचे सगळें मूळ सांगितले वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितल्या वर्गादींतून वजा करावें. त्याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें, म्हणजे इच्छिलें वर्गादिमूळ मिळेल*.

---

* जेव्हां सांगितला घात फार मोठा आहे तेव्हां या रीतीनें तपशील करण्यामुळें फार श्रम पडतो असें कोणाचे मनांत येईल तर कोणेसमयीं संयुक्त पदाचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे कीं, त्यांतील कित्येक सोईचीं पदें घेऊन त्यांचीं सांगितलीं मूळें काढावीं. आणि तीं मुळाचीं पदें क्रमाशानें (+)धन(−)ऋण चिन्हांनीं जोडून लिहावीं. नंतर हें मूळ सांगितल्या घातापर्यंत वाढवावें. नंतर तें जर सांगितले घाताबराबर झालें तर हेंच मूळ खरें आहे. परंतु जर वाढविल्या घाताचीं मुमारानें पूर्वीं केलेलीं चिन्हें सांगितले घाताबराबर नाहींत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोनही ठिकाणीं सांगितले घाताबराबर होतील अशीं करावीं.

जसें पांचवे उदाहरणांत ७अ-२ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट

उदाहरणें

पहिलें, $अ^४-२अ^३ब+३अ^२ब^२-२अब^३+ब^४$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$अ^४-२अ^३ब+३अ^२ब^२-२अब^३+ब^४($ $अ^२-अब+ब^२$. हें वर्गमूळ. हें उत्तर.

$अ^४$

$२अ^२)-२अ^३ब$

$अ^४-२अ^३ब+अ^२ब^२=(अ^२-अब)^२$

$२अ^२) \quad +२अ^२ब^२$

$अ^४-२अ^३ब+३अ^२ब^२-२अब^३+ब^४=(अ^२-अब+ब^२)^२$

दुसरें, $अ^६-६अ^५+२१अ^४-४४अ^३+६३अ^२-५४अ+२७$ त्यांचें घनमूळ काढ.

$अ^६-६अ^५+२१अ^४-४४अ^३+६३अ^२-५४अ+२७($ $अ^२-२अ+३$ घनमूळ. हें उत्तर.

$अ^६$

या दोन पदांचे मूळांचे वजाबाकी बराबर आहे. आणि तिसरे उदाहरणांत अ-ब+स हे संयुक्त मूळ प्रथम चवथें आणि शेवट या तीन पदांचे मूळांची बेरीज आहे. आणि साहावे उदाहरणांत संयुक्त मूळ प्रथम आणि शेवट त्या दोन पदांपासून निघतें.

$३अ^{४}$) $-६अ^{५}$

$अ^{६}-६अ^{५}+१२अ^{४}-८अ^{३}=(अ^{२}-२अ)^{३}$

$३अ^{४}$) $+९अ^{४}$

$अ^{६}-६अ^{५}+२१अ^{४}-४४अ^{३}+६३अ^{२}-५४अ+२७=(अ^{२}-२अ+३)^{३}$

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

तिसरें, $अ^{२}-२अब+२अक्ष+ब^{२}-२बक्ष+क्ष^{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर, $अ-ब+क्ष$.

चवथें, $अ^{६}-३अ^{५}+९अ^{४}-१३अ^{३}+१८अ^{२}-१२अ+८$ त्यांचें घनमूळ काढ.

उत्तर, $अ^{२}-अ+२$

पांचवें, $८१अ^{४}-२१६अ^{३}ब+२१६अ^{२}ब^{२}-९६अब^{३}+१६ब^{४}$ त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, $३अ-२ब$.

साहावें, $अ^{५}-१०अ^{४}+४०अ^{३}-८०अ^{२}+८०अ-३२$ त्यांचें पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, $अ-२$

सातवें, $१-क्ष^{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

आठवें, $१-क्ष^{२}$ त्यांचें घनमूळ काढ.



करणी.

करणी म्हणजे ज्याचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीं तें पद. आणि त्या करणीस मूळप्रकाशकानें अथवा मूळ चिन्हानें युक्त लिहितात. जसें, $७^{१/२}$ अथवा $\sqrt{७}$ हीं दोनही ७ त्या संख्येचें वर्गमूळ दाखवितात. आणि $२^{२/३}$ अथवा $\sqrt[३]{२^{२}}$ अथवा $\sqrt[३]{४}$ हीं २ त्या संख्येचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितात. म्हणजे २ हें पद कोणत्या घातापर्यंत वाढवावें हें मूळप्रकाशक अंश दाखवितात, आणि वाढविल्या पदाचे कोणत्या घातानें मूळ काढावें तें छेद दाखवितात.

पहिला प्रकार.

अखंड पदास करणीनें रूप द्यावयाचा.

सांगितल्या पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घातपर्यंत वाढवावें, नंतर त्या नवे वाढविल्या पदास सांगितल्या करणीचे मूळ चिन्हानें युक्त करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, ४ त्यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

$४^{२} = ४ \times ४ = १६$ तर $\sqrt{१६}$ अथवा $१६^{१/२}$ हें उत्तर.

दुसरें, $३अ^{२}$ त्यास घनमूळाचें रूप दे

आतां $(३अ^{२})^{३} = ३अ^{२} \times ३अ^{२} \times ३अ^{२} = २७अ^{६}$ तर $\sqrt[३]{२७अ^{६}}$ अथवा $(२७अ^{६})^{\frac{१}{३}}$ हें उत्तर.

तिसरें, ६ त्यांस घनमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[३]{२१६}$ अथवा $(२१६)^{\frac{१}{३}}$

चवथें, $\frac{१}{३}$ अब त्यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{\frac{१}{९}अ^{२}ब^{२}}$ अथवा $(\frac{१}{९}अ^{२}ब^{२})^{\frac{१}{२}}$

पांचवें, २ त्यांस चतुर्घातमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[४]{१६}$ अथवा $(१६)^{\frac{१}{४}}$

साहावें, $अ^{२}$ त्यास पंचघातमूळाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[५]{अ^{१०}}$ अथवा $(अ^{१०})^{\frac{१}{५}}$

सातवें, अ+क्ष त्यास वर्गमूळाचें रूप दे

उत्तर, $\sqrt{अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२}}$ अथवा $(अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$

आठवें, अ−क्ष त्यास घनमूळाचें रूप दे

उत्तर, $\sqrt[३]{अ^{३}-३अ^{२}क्ष+३अक्ष^{२}-क्ष^{३}}$ अथवा $(अ^{३}-३अ^{२}क्ष+३अक्ष^{२}-क्ष^{३})^{\frac{१}{३}}$

दुसरा प्रकार.

पदांस सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचा.

१ सांगितल्या पदांचे मूळप्रकाशकांस समच्छेद करावे, नंतर तीं प्रत्येक पदें वेगळाले अंशस्थळींचे संख्येइतके घाता पर्यंत वाढवावीं, आणि त्या समच्छेदांचे अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा. म्हणजे तीं पदें सममूळप्रकाशक झालीं.

२ जर सांगितलें सममूळप्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे, तर पदाचा मूळप्रकाशक सांगितले प्रकाशकानें भागावा. म्हणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचे नवे मूळप्रकाशक होतील. नंतर त्या त्या पदांस ते ते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगितला प्रकाशक लिहावा. म्हणजे इछिलें बराबर पद निघेल.

उदाहरणें.

पहिलें, $३^{\frac{१}{२}}$ आणि $५^{\frac{१}{५}}$ त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे

आतां $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{५} = \frac{५}{१०}$ आणि $\frac{२}{१०}$

त्याजकरितां $३^{\frac{५}{१०}}$ आणि $५^{\frac{२}{१०}} = (३^५)^{\frac{१}{१०}}$ आणि $(५^२)^{\frac{१}{१०}}$ म्हणजे $\sqrt[१०]{२४३}$ आणि $\sqrt[१०]{२५}$ सममूळप्रकाशक झाले हें उत्तर.

दुसरें, $अ^{२}$ आणि $ब^{\frac{१}{३}}$ त्यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळप्रकाशक कर

आतां $\frac{२}{१} \div \frac{१}{२} = \frac{२}{१} \times \frac{२}{१} = \frac{४}{१}$ हा प्रथमपदाचा मूळप्रकाशक

आणि $\frac{१}{३} \div \frac{१}{२} = \frac{१}{३} \times \frac{२}{१} = \frac{२}{३}$ हा दुसरे पदाचा मूळप्रकाशक

त्याजकरितां $(अ^{६})^{\frac{१}{१२}}$ आणि $(ब^{३})^{\frac{१}{१२}}$ अथवा $\sqrt[१२]{अ^{६}}$ आणि $\sqrt[१२]{ब^{३}}$ हीं इछिलीं पदें पूर्वपदांचे बराबर किमतीचीं आहेत.

तिसरें, $४^{\frac{२}{३}}$ आणि $५^{\frac{१}{३}}$ त्यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, $(२५६)^{\frac{१}{६}}$ आणि $(२५)^{\frac{१}{६}}$

चवथें, $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{३}}$ त्यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, $(अ^{३})^{\frac{१}{६}}$ आणि $(क्ष^{२})^{\frac{१}{६}}$

पांचवें, $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{३}}$ त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[६]{अ^{३}}$ आणि $\sqrt[६]{क्ष^{२}}$

साहावें, $(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}$ आणि $(अ-क्ष)^{\frac{१}{२}}$ त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

सातवें, $(अ+ब)^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-ब)^{\frac{१}{३}}$ त्यांस सम-मूळप्रकाशक रूप दे.

तिसरा प्रकार.

करणीस अतिसरळरूप द्यावयाची.

रीति.

सांगितली संख्या अथवा पद त्यांचे गुण्यगुणकरूपानें दोन अवयव करावे. असे कीं, त्यांतील एक अवयव त्या संख्येचे आंत सांगितले मूळाचा मोठा घात होईल. नंतर त्या मोठे घाताचें सांगितलें मूळ काढून तें राहिले दुसरे अवयवाचे डावेकडे लिहावें, आणि त्या दोहोंचेमध्यें सांगितले मूळाचें चिह्न करावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{४८}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{४८} = \sqrt{१६ \times ३} = ४\sqrt{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt[३]{१०८}$ त्या करणीस अतिसरळरूप दे.

आतां $\sqrt[३]{१०८} = \sqrt[३]{२७ \times ४} = ३\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर.

प्रथम टीप. जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद करणीस मागें जोडिलें आहे, तेव्हां तें पद त्या गुण्यगुणकरूप

---

* जेव्हां सांगितले करणींत वरसांगितले गुण्यगुणकरूप दोन अवयवांतील एकही अवयव सांगितले मुळाचा बरोबर मोठा घात होत नाहीं, तेव्हां ती करणी सरळरूपच आहे. जसें, $\sqrt{१५}$ यास याहून दुसरें सरळरूप होत नाहीं. कारण, गुण्यगुणकरूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोंतून एकही इच्छिले मूळाचा पूर्णघात म्हणजे एथें वर्ग होत नाहीं.

दोन अवयवांत जो पूर्ण घात असेल त्याचे मुळांनीं गुणून तो गुणाकार पूर्वरीतीनें त्या दुसरे अवयवाशीं जोडून लिहावा.

उदाहरणें.

पहिलें, २√३२ त्यांस अतिसरळरूप दे.

आतां २√३२ = २√(१६×२) = २×४√२ = ८√२ हें उत्तर.

दुसरें, ५∛२४ त्यांस अतिसरळरूप दे.

आतां ५∛२४ = ५∛(८×३) = ५×२∛३ = १०∛३ हें उत्तर.

दुसरी टीप. अपूर्ण करणीसही अतिसरळ रूप देतां येतें. त्या पुढील रीतीकरून.

.रीति.

अंश आणि छेद हे कोणत्याही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे. असे कीं, गुणलेले छेद सांगितले मुळाचा पूर्ण घात होतील. नंतर त्या घातानें सांगितलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा, आणि त्यास करणीचा राहिला दुसरा अवयव जोडून मध्यें पूर्वप्रमाणें मूळचिह्न करावें.*

---

* करणीस अतिसरळरूप द्यावयाचा उपयोग असा आहे कीं, उत्तर दशांशांत सरळ निघतें. हें या प्रथम उदाहरणाचा विचार केला असतां कळेल. पहा,

उदाहरणें

पहिलें, $\sqrt{\frac{२}{७}}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{\frac{२}{७}} = \sqrt{\frac{२\times७}{७\times७}} = \sqrt{\frac{१४}{४९}} = \frac{१}{७}\sqrt{१४}$ हें उत्तर.

दुसरें, $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे.

आतां $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}} = ३\sqrt[३]{\frac{२\times२५}{५\times२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{५०}{१२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{१}{१२५}}\times\sqrt[३]{५०} =$
$३\times\frac{१}{५}\sqrt[३]{५०} = \frac{३}{५}\sqrt[३]{५०}$ हें उत्तर

तिसरें, $\sqrt{३२}$ त्या करणीस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $४\sqrt{२}$

चवथें, $\sqrt{३२०}$ त्या करणीस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $८\sqrt{५}$

पांचवें, $\sqrt{७५}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

उत्तर, $५\sqrt{३}$

यांत दिसतें कीं $\sqrt{\frac{२}{७}} = \frac{१}{७}\sqrt{१४}$ या उदाहरणांत १४ चें वर्गमूळ काढायाचें, अथवा वर्ग मूळकोष्टकांतून तयार घ्यावयाचें आणि त्या मुळास ७ यांनीं भागायाचें इतकें मात्र आहे. आणि सरळ रूप न दिलें तर छेदांनीं अंश भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें. अथवा अंश छेदांचीं वेगळालीं मुळें काढून अंशांचें मूळ छेदांचे मुळानें भागावें लागतें. आणि त्या दोन्ही रीतींहीं मूळ काढण्यास अतिसरळरूप रीतीपेक्षां या उदाहरणीं बहुत श्रम पडतात. आणि दुसरे उदाहरणांत तर अति सरळरूप नदिल्यास बहुतच श्रम पडतात.

साहावें, $\sqrt[3]{१८९}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

उत्तर, $३\sqrt[3]{७}$

सातवें, $\sqrt{७५ अ^{२} ब}$ त्यांस. अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $५ अ \sqrt{३ ब}$

आठवें, $७\sqrt{८०}$ त्यांस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $२८\sqrt{५}$

नववें, $९\sqrt{८१}$ त्यांस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, ८१

दाहावें, $\sqrt{\frac{४४}{७५}}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे.

उत्तर, $\frac{२}{१५}\sqrt{३३}$

अकरावें, $\sqrt[3]{\frac{१३५}{३२}}$ त्यांस अतिसरळरूप दे.

उत्तर $\frac{३}{४}\sqrt[3]{१०}$

बारावें, $\frac{क}{ड}\sqrt{\frac{अ^{२}}{ब}}$ त्यांस अतिसरळरूप दे.

उत्तर, $\frac{अक}{बड}\sqrt{ब}$

तेरावें, $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{७}}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे.

उत्तर, $\frac{३}{२८}\sqrt{१४}$

चौदावें, $\frac{३}{५}\sqrt[3]{\frac{१६}{८१}}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे.

उत्तर, $\frac{२}{१५}\sqrt[3]{१८}$

पंधरावें, $\sqrt{९८ अ^{३} क्ष}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे.

सोळावें, $\sqrt{\text{क्ष}^{३}-\text{अक्ष}^{२}}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

चवथा प्रकार.

करणी पदांची मिळवणी करायाची रीति.

१ अपूर्ण पदें असतील तीं समछेद करावीं, आणि पूर्व प्रकाराप्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळरूप द्यावें.

२ ज्या पदाचा मूळप्रकाशक विषम आहे, त्यास दुसरे प्रकाराप्रमाणें बरोबर किमतीचें सममूळप्रकाशकपदाचें रूप द्यावें.

३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल, तर त्या पदांचे अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन तीस ती करणी जोडून लिहावी, हीच त्यांची मिळवणी. परंतु सर्व पदांत करणी अवयव एकरूप नसेल, तर तीं सर्व पदें (+) धन (-) ऋण चिन्हें जोडून लिहावीं, हीच त्यांची मिळवणी.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

आतां $\sqrt{१८} = \sqrt{९ \times २} = ३\sqrt{२}$

आणि $\sqrt{३२} = \sqrt{१६ \times २} = ४\sqrt{२}$

तर, $\overline{७\sqrt{२}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt[३]{३७५}$ आणि $\sqrt[३]{१९२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

आतां $\sqrt[३]{३७५} = \sqrt[३]{१२५ \times ३} = ५\sqrt[३]{३}$

आणि $\sqrt[३]{१९२} = \sqrt[३]{६४ \times ३} = ४\sqrt[३]{३}$

$\overline{९\sqrt[३]{३}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $७\sqrt{३}$

चवथें, $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $११\sqrt{२}$

पांचवें, $\sqrt{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt{\frac{१}{१५}}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $४\sqrt{\frac{१}{१५}}$ अथवा $\frac{४}{१५}\sqrt{१५}$

साहावें, $\sqrt[३]{५६}$ आणि $\sqrt[३]{१८९}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $५\sqrt[३]{७}$

सातवें, $\sqrt[३]{५००}$ आणि $\sqrt[३]{१०८}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $८\sqrt[३]{४}$

आठवें, $\sqrt[३]{\frac{१}{४}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{१}{३२}}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $\frac{३}{४}\sqrt[३]{२}$

नववें, $४\sqrt{१४७}$ आणि $३\sqrt{७५}$ त्यांची बेरीज काय होती? उत्तर, $४३\sqrt{३}$

दाहावें, $३\sqrt{\frac{२}{५}}$ आणि $२\sqrt{\frac{१}{१०}}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $\frac{४}{५}\sqrt{१०}$

अकरावें, $७\sqrt{अब}$ आणि $५\sqrt{१६अब}$ त्यांची बेरीज काय होती?

बारावें, $\frac{१}{२}\sqrt{अब}$ आणि $\frac{१}{२}\sqrt{४बक्ष}$ त्यांची बेरीज काय होती?

पांचवा प्रकार.

करणी पदांची वजाबाकी करायाचा.

रीति.

पूर्व प्रकाराप्रमाणें दोनही पदें सिद्ध करावीं नंतर करणी एकरूपच असेल तर अखंडपदांची वजाबाकी करावी, आणि राहिले बाकीस ती साधारण करणी जोडावी, म्हणजे वजाबाकी झाली. त्या पदांची करणी एकरूप नसेल तर तीं

पदें (-) ऋण चिन्ह जोडून लिहावीं, म्हणजे हीच वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{३२०}$ आणि $\sqrt{८०}$ त्यांची वजाबाकी कर.

आतां $\sqrt{३२०} = \sqrt{६४ \times ५} = ८\sqrt{५}$

आणि $\sqrt{८०} = \sqrt{१६ \times ५} = ४\sqrt{५}$

$४\sqrt{५}$ बाकी हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt[३]{१२८}$ आणि $\sqrt[३]{५४}$ त्यांची वजाबाकी कर.

आतां $\sqrt[३]{१२८} = \sqrt[३]{६४ \times २} = ४\sqrt[३]{२}$

आणि $\sqrt[३]{५४} = \sqrt[३]{२७ \times २} = ३\sqrt[३]{२}$

$१\sqrt[३]{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $५\sqrt{२०}$ आणि $३\sqrt{४५}$ त्यांची वजाबाकी कर.

आतां $५\sqrt{२०} = ५\sqrt{४ \times ५} = १०\sqrt{५}$

आणि $३\sqrt{४५} = ३\sqrt{९ \times ५} = ९\sqrt{५}$

$१\sqrt{५}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{६}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

आतां $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{६}{९}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{१}{९}}\sqrt{६} = \frac{१}{४}\sqrt{६}$

आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{६}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{६}{३६}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{३६}}\sqrt{६} = \frac{१}{१५}\sqrt{६}$

$\frac{११}{६०}\sqrt{६}$ हें उ॰

पांचवें, $\sqrt{७५}$ आणि $\sqrt{४८}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\sqrt{३}$

साहावें, $\sqrt[३]{२५६}$ आणि $\sqrt[३]{३२}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $२\sqrt[३]{४}$

सातवें, $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{१}{३}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{६}\sqrt{३}$

आठवें, $\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{८}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{१२}\sqrt{६}$

नववें, $\sqrt[३]{\frac{३}{९}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{२५}{९}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{६}\sqrt[३]{७५}$

दाहावें, $\sqrt{२४ अ^{२} ब^{२}}$ आणि $\sqrt{५४ ब^{२}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $(३ब - २अब)\sqrt{६}$

साहावा प्रकार.

करणीपदें परस्पर गुणायाचा.

रीति.

जेव्हां सर्व पदांत करणी एकजातीची आहे, तेव्हां त्या

पदांचे अखंड अवयवांचा गुणाकार करावा. तसाच खंड अवयवांचा ही गुणाकार करावा. नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्यें साधारण करणीचिन्ह लिहावें, म्हणजे हा इच्छिला गुणाकार होईल. त्या गुणाकारास तिसरे प्रकारा प्रमाणें अतिसरळरूप देतां येईल.

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे, तर त्या करणीस सममूळप्रकाशकरूप देऊन तीं पदें वर सांगितल्या प्रमाणें गुणावीं.

त्यासमयीं पूर्वीं सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५६) करावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गादिमूळ प्रकाशक विरूप आहे, तर त्यांचा, पदाचे प्रकाशकांची बेरीज करून ती त्या साधारणपदास रीतीप्रमाणें जोडावी, म्हणजे गुणाकार झाला

उदाहरणें.

पहिलें; $३\sqrt{८}$ आणि $२\sqrt{६}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $३\sqrt{८}$ हे गुण्य

आणि $२\sqrt{६}$ हे गुणक

$६\sqrt{४८} = ६\sqrt{१६ \times ३} = २४\sqrt{३}$ गुणाकार हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$

$\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$

$\frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१०}{१८}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{५}{९}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१५}{२७}} = \frac{१}{८}\sqrt[३]{१५}$ गुणाकार हें उत्तर,

तिसरें, $२^{\frac{१}{२}}$ आणि $३^{\frac{१}{३}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

$\frac{१}{२}\ \frac{३}{३} = \frac{३}{६}$ हा प्रथमपदाचा

$= \frac{२}{६}$ हा दुसरे पदाचा

आतां $२^{\frac{१}{२}} = २^{\frac{३}{६}} = (२^{३})^{\frac{१}{६}} = ८^{\frac{१}{६}}$

$३^{\frac{१}{३}} = ३^{\frac{२}{६}} = (३^{२})^{\frac{१}{६}} = ९^{\frac{१}{६}}$

$७२^{\frac{१}{६}}$ गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, $५\sqrt{अ}$ आणि $३\sqrt[३]{अ}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $५\sqrt{अ} = ५अ^{\frac{१}{२}} = ५अ^{\frac{३}{६}}$

$३\sqrt[३]{अ} = ३अ^{\frac{१}{३}} = ३अ^{\frac{२}{६}}$

$१५अ^{\frac{५}{६}} = १५(अ^{५})^{\frac{१}{६}} = १५\sqrt[६]{अ^{५}}$ हें उत्तर.

पांचवें, $३\sqrt{२}$ आणि $२\sqrt{८}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, २४

साहावें, $\frac{१}{२}\sqrt[३]{४}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{१२}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, $\frac{३}{४}\sqrt[३]{६}$

सातवें, $\frac{५}{३}\sqrt{\frac{३}{६}}$ आणि $\frac{१}{१०}\sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, $\frac{३}{२०}\sqrt{१५}$

आठवें, $२\sqrt[३]{१४}$, आणि $३\sqrt[३]{४}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर $१२\sqrt[३]{७}$

नववें, $२\text{अ}^{\frac{१}{२}}$ आणि $\text{अ}^{\frac{१}{२}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, २अ

दाहावें, $(\text{अ}+\text{ब})^{\frac{१}{२}}$ आणि $(\text{अ}+\text{ब})^{\frac{१}{२}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

अकरावें, $२\text{क्ष}+\sqrt{\text{ब}}$ आणि $२\text{क्ष}-\sqrt{}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

बारावें, $(\text{अ}+२\sqrt{\text{ब}})^{\frac{१}{२}}$ आणि $(\text{अ}-२\sqrt{\text{ब}})^{\frac{१}{२}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

तेरावें, $२\text{क्ष}^{\frac{१}{\text{न}}}$ आणि $३\text{क्ष}^{\frac{१}{\text{न}}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

चौदावें, $४\text{क्ष}^{\frac{१}{\text{न}}}$ आणि $२\text{य}^{\frac{१}{\text{न}}}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?



सातवा प्रकार.

एक करणीपदास दुसरे करणी पदानें भागायाचा.

रीति.

जेव्हां करणी एक जातीची आहे, तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा. तसाच खंडपदांचाही भागाकार करावा. आणि त्या दोन भागाकारांमध्यें साधारण करणीचिन्ह लिहावें, म्हणजे भागाकार झाला.

जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मूळप्रकाशक रूप देऊन वरचेप्रमाणें भागाकार करावा.

त्यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ५५) असावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादिप्रकाशक भिन्नजाति आहेत, तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे वजाबाकीवरून होतो तो असाकीं, प्रकाशकांची वजाबाकी करून ती साधारण पदास रीतीप्रमाणें जोडावी, म्हणजे भागाकार झाला.

उदाहरणें.

पहिलें, ८√१०८ त्यांस २√६ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{८\sqrt{१०८}}{२\sqrt{६}} = ४\sqrt{१८} = ४\sqrt{९ \times २} = १२\sqrt{२}$ भागाका

र हें उत्तर.

दुसरें, $८\sqrt[३]{५१२}$ त्यांस $४\sqrt[३]{२}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{८\sqrt[३]{५१२}}{४\sqrt[३]{२}} = २\sqrt[३]{२५६} = २\sqrt[३]{६४\times४} = ८\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{१}{२}\sqrt{५}$ त्यांस $\frac{१}{३}\sqrt{२}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{\frac{१}{२}\sqrt{५}}{\frac{१}{३}\sqrt{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{५}{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{१०}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{१०}$ हें उत्तर.

चवथें, $\sqrt{७}$ त्यांस $\sqrt[३]{७}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{\sqrt{७}}{\sqrt[३]{७}} = \frac{७^{\frac{१}{२}}}{७^{\frac{१}{३}}} = \frac{७^{\frac{३}{६}}}{७^{\frac{२}{६}}} = ७^{\frac{३}{६}-\frac{२}{६}} = ७^{\frac{१}{६}}$ हें उत्तर.

पांचवें, $४\sqrt{५०}$ त्यांस $२\sqrt{५}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $२\sqrt{१०}$

साहावें, $६\sqrt[३]{१००}$ त्यांस $३\sqrt[३]{५}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $२\sqrt[३]{२०}$

सातवें $\frac{१}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}$ त्यांस $\frac{१}{४}\sqrt{\frac{२}{३}}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{१}{३}\sqrt{५}$

आठवें, $\frac{७}{१२}\sqrt[३]{\frac{३}{१६}}$ त्यांस $\frac{१}{३}\sqrt[३]{\frac{२}{५}}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{७}{१६}\sqrt[३]{३०}$

नववें, $\frac{३}{४}\sqrt{अ}$ त्यांस अथवा $\frac{३}{४}अ^{\frac{१}{२}}$ त्यांस $\frac{१}{३}\sqrt[४]{अ}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{९}{४}अ^{\frac{१}{४}}$

दाहावें, $अ^{६}$ त्यास $अ^{२}$ त्यांनीं भाग.

अकरावें, १ $अ^{३}$ त्यास ४ $अ^{३}$ त्यांनीं भाग.

टीप. करणीचा भागाकार भाज्यभाजकांचे मूळप्रकाशकचिन्हांचे वजाबाकीवरून होतो, त्यावरून निश्चय कळतें कीं, कोणतेही अपूर्णांकांचे अथवा अपूर्णबीजांचे छेद अंशास्थळीं घेतां येतील. अथवा अंश छेदस्थळीं घेतां येतील. असे कीं, प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल करून.

पुनः $\frac{अ^{म}}{अ^{म}} = १$ अथवा $अ^{म-म} = अ^{०}$ त्यापासून निघतें कीं, हें $अ^{०}$ अक्षरचिन्ह कोणतेही एकपदाबरोबर आहे, जें पद १ त्या संख्येचे बराबर आहे. त्याजकरितां ज्यास्थळीं $अ^{०}$ अशा रीतीनें अक्षरचिन्ह येतें तेथें १ हा अंक लिहितां येईल*.

---

* याजवर याहून अधिक विचार केला पाहिजे.

१ कोणतेही पदास शून्य मिळविलें अथवा त्यांतून वजा केलें तर तें पद अधिक किंवा उणें होत नाहीं. म्हणजे,

$अ + ० = अ$ आणि $अ - ० = अ$.

उदाहरणें.

पहिलें, जसें $\frac{१}{अ} = \frac{अ^{-१}}{१}$ अथवा $अ^{-१}$ आणि $\frac{१}{अ^{न}} = \frac{अ^{-न}}{१}$ अथवा $अ^{-न}$

दुसरें, $\frac{ब}{अ} = \frac{बअ^{-१}}{१}$ अथवा $बअ^{-१}$ आणि $\frac{अ^{-न}}{ब^{-म}} = \frac{ब^{म}}{अ^{न}} = \frac{ब^{म}}{अ^{न}}$

तिसरें, $\frac{१}{अ^{२}}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि.

चवथें, $अ^{-२}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि.

---

२ जर कोणतेही पदानें शून्य गुणिलें किंवा भागिलें तर गुणाकार किंवा भागाकार शून्य होईल. कारण किती वेळा शून्य घेतलें तर शून्यच होईल. शून्याचे किती भाग घेतले तरी शून्यच होईल. म्हणजे $० \times अ$ अथवा $अ \times ० = ०$ आणि $\frac{०}{अ} = ०$

३ यांतूनही निघतें कीं, शून्यानें भागिलें शून्य त्याचा भागाकार कांहीं एक सांतपद आहे कारण

$० \times अ = ०$ अथवा $० = ० \times अ$ याजकरितां $\frac{०}{०} = अ$

४ याहूनही अधिक जर कोणतेंही सांतपद शून्यानें भागिलें तर भागाकार अनंत होईल. या पुढील उदाहरणांस पाहा.

$\frac{ब}{अ} = क$ जर बची किंमत सर्वकाळ बरोबर असेल तर साफ दिसतें कीं, जितका अ लहान होत जाईल तितका क मोठा होईल. याजकरितां जर अ अनंत लहान आहे, तर क अनंत मोठा होईल. आणि जेव्हां अ शून्य आहे तेव्हां क अनंत होईल. म्हणजे, $\frac{ब}{०}$ अथवा $\frac{१}{०} = \infty$ अनंत आहे.

हा गुणविचार यापुढें शोधतां मोठे मोठे कामांत बहुत उपयोगी आ ,याजकरितां पक्केपणें स्मरणांत असावा.

पांचवें, $\frac{१}{अ+क्ष}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि.

साहावें, $अ(अ^{२}-क्ष^{२})^{-३}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि.



आठवा प्रकार.

करणी पदास वर्गघनादिकें करून वाढवायाचा रीति.

जेव्हां करणी पद एकाकी आहे. वर्ग करणें आहे तर त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह दोहोंनीं गुणावें. आणि घन करणें आहे तर तिहींनीं गुणावें, इत्यादि चतुर्घातादिकीं. हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल. नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गघनादिक करून त्यास जोडावें. म्हणजे करणीचे एकाकी पदाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल. जर करणी संयुक्तपद आहे तर इच्छिलें वर्गघनादिक करायाकरितां इच्छिलें वर्गघनादिक होई तोंपर्यंत वर्गघनादिरीतीनें तें करणी संयुक्तपद पु-

नःपुनः गुणावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२}{३}अ^{\frac{३}{४}}$ त्यांचा वर्ग काय होतो?

आतां $\left(\frac{२}{३}अ^{\frac{३}{४}}\right)^२ = \frac{४}{९}अ^{\frac{३}{४}\times२} = \frac{४}{९}अ^{\frac{३}{२}}$ अथवा $\frac{४}{९}\sqrt{अ^३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{२}{३}\sqrt{३}$ त्याचा घन काय होतो?

आतां $\left(\frac{२}{३}\sqrt{३}\right)^३ = \frac{८}{२७}\times३^{\frac{१}{२}\times३} = \frac{८}{२७}\times३^{\frac{३}{२}} = \frac{८}{२७}\times\sqrt{२७} = \frac{८}{२७}\times\sqrt{९\times३} = \frac{२४}{२७}\sqrt{३} = \frac{८}{९}\sqrt{३}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२}{३}\sqrt{६}$ त्याचा घन काय होतो?

आतां $\frac{२}{३}\times\frac{२}{३}\times\frac{२}{३} = \frac{८}{२७}$ नंतर $६^{\frac{१}{२}\times३} = ६^{\frac{३}{२}} = \sqrt{२१६} = \sqrt{३६\times६} = ६\sqrt{६}$.

तेव्हां $\left(\frac{२}{३}\sqrt{६}\right)^३ = \frac{८}{२७}\times६\sqrt{६} = \frac{४८}{२७}\sqrt{६} = \frac{१६}{९}\sqrt{६}$ हें उत्तर.

चवथें, $२\sqrt[३]{२}$ त्यांचा वर्ग काय होतो?

उत्तर, $४\sqrt[३]{४}$

पांचवें, $३^{\frac{१}{२}}$ त्याचा घन काय होतो?

उत्तर, $३\sqrt{३}$

---

* जेव्हां कोणतेंही पद वर्गमूळचिन्हानें युक्त आहे. आणि त्याचा वर्ग करणें आहे तर तें वर्गमूळचिन्ह पुसून टाकावें. म्हणजे वर्ग झाला. जसें, $(\sqrt{अ})^२$ अथवा $\sqrt{अ}\times\sqrt{अ} = अ$ आणि $(\sqrt{अ+ब})^२$ अथवा $\sqrt{अ+ब}\times\sqrt{अ+ब} = अ+ब$.

साहविं, $\frac{१}{३}\sqrt{३}$ त्याचा घन काय होतो?

उत्तर, $\frac{१}{९}\sqrt{३}$

सातवें, $\frac{१}{२}\sqrt{२}$ त्याचा चतुर्घात काय होतो?

उत्तर, $\frac{१}{४}$

आठवें, $अ^{म}$ त्याचा म घात काय होतो?

नववें, $२+\sqrt{३}$ त्याचा वर्ग काय होतो?

दाहावें, $३+२\sqrt{५}$ त्याचा वर्ग काय होतो?

अकरावें, $\sqrt{क्ष}+३\sqrt{य}$ त्याचा घन काय होतो?

नववा प्रकार.

करणीपदांचें वर्गघनादिमूळ काढायाचा

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे, आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर, त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह $\frac{१}{२}$ त्यानें गुणावें, आणि घनमूळ काढणें तर $\frac{१}{३}$ त्यानें गुणावें इत्यादि चतुर्घातादिमूळीं. हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छिलें वर्गादिमूळ हो-

ईल. नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्या चें इच्छिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणीपदांतील त्या खंड अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडावें म्हणजे करणीचे एकाकी पदाचें इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल. जर करणी संयुक्त आहे तर पूर्वी सांगितले रीतीप्रमाणें त्याचें वर्गादिमूळ काढावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, $१\sqrt{३}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

आतां $(१\sqrt{३})^{\frac{१}{२}} = १^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{२} \times \frac{१}{२}} = १ \times ३^{\frac{१}{४}} = \sqrt[४]{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{८}\sqrt{२}$ त्याचें घनमूळ काढ.

आतां $(\frac{१}{८}\sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (\frac{१}{८})^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{२} \times \frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \times २^{\frac{१}{६}} = \frac{१}{२}\sqrt[६]{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{१}{६}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

---

* कोणतेंही पद अ याचे म घाताचें न मूळ अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचा म घात $= अ^{\frac{म}{न}}$

आणि कोणतेंही पद अ याचे म मूळाचे न मूळ, अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचें म मूळ $= अ^{\frac{१}{मन}}$

यापासून कळतें कीं, अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे चतुर्घातमूळाबरोबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा अ पदाचे घनमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे षड्घातमूळाबरोबर आहे. आणि याप्रमाणें पुढेंही. कोणतेंही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर याप्रमाणें काढावें.

उत्तर, ६√६

चवथें, ८ अ³ब त्याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, २ अ ∛ब

पांचवें, १६ अ त्याचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, २ ∜अ

साहावें, ९अ³ त्याचें ममूळ काढ.

सातवें, अ² - ६ अ √ब + ९ब त्याचें वर्गमूळ काढ.

आठवें, $\frac{अ}{२}$ √ $\frac{अ}{२}$ त्यांचें घनमूळ काढ.



दाहावा प्रकार.

द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास सामान्य करणीरूप द्यावयाचा.

रीति.

सांगितलें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद त्यास त्यांतील करणीचे घातापर्यंत वाढवावें, नंतर त्या घाताचें मूळचिन्ह त्या द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास जोडून लिहावें, म्हणजे

त्या पदास सामान्य करणीरूप झालें.

उदाहरणें.

पहिलें, $२+\sqrt{३}$ त्यास सामान्यकरणी रूप दे.
आतां $(२+\sqrt{३})^२ = ४+३+४\sqrt{३} = ७+४\sqrt{३}$ त्याजकरितां $२+\sqrt{३} = \sqrt{७+४\sqrt{३}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{२}+\sqrt{३}$ त्यास सामान्यकरणीरूप दे.
आतां $(\sqrt{२}+\sqrt{३})^२ = २+३+२\sqrt{६} = ५+२\sqrt{६}$ त्याजकरितां $\sqrt{२}+\sqrt{३} = \sqrt{५+२\sqrt{६}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}$ त्यास सामान्यकरणीरूप दे.
आतां $(\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})^३ = ६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}$ त्याजकरितां $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४} = \sqrt[३]{६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{६(१+\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})}$ हें उत्तर.

चवथें, $३-\sqrt{५}$ त्यास सामान्यकरणीरूप दे.

पांचवें, $\sqrt{२}-२\sqrt{६}$ त्यांस सामान्यकरणी रूप दे.

साहावें, $४-\sqrt{७}$ त्यास सामान्यकरणीरूप दे.

सातवें, $२\sqrt{३}-३\sqrt{१}$ त्यास सामान्यकरणीरूप दे.

अकरावा प्रकार.

द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढायाचा.

रीति.

त्या खालचे दोन सारणीकोष्टकांत अक्षरस्थळीं सांगितले करणीचे दोन अवयव लिहावे, म्हणजे सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें इच्छिलें मूळ होईल.

$$\sqrt{अ+\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}+\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}$$

$$\sqrt{अ-\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}-\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}$$

पाहायाचें आहे. जर त्या दोन सारणीकोष्टकांत अ आणि $\sqrt{अ^२-ब}$ अखंडपदें असतील, तर मूळ पदें दोनही करणी असतील. अथवा एक पद अखंड आणि दुसरें पद करणी असें असेल. म्हणून दोन प्रकारचीं मात्र उदाहरणें त्या रीतीच्या उपयोगीं आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, $११+\sqrt{७२}$ अथवा $११+६\sqrt{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

आतां $\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}=\sqrt{\frac{११}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{१२१-७२}}=\sqrt{\frac{११}{२}+\frac{७}{२}}=$

$\sqrt{\frac{१८}{२}} = \sqrt{९} = ३$

आतां $+\sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^{२} - ब}} = \sqrt{\frac{११}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{१२१ - ७२}} = \sqrt{\frac{११}{२} - \frac{७}{२}} =$

$\sqrt{\frac{४}{२}} = \sqrt{२}$ त्याजकरितां $\sqrt{११ + ६\sqrt{२}} = ३ + \sqrt{२}$ हें उत्तर.

दुसरें, $३ - २\sqrt{२}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

आतां $\sqrt{\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}\sqrt{अ^{२} - ब}} - \sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^{२} - ब}}$

$\sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = \sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}} = \sqrt{\frac{४}{२}} = \sqrt{२}$

$-\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = -\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}} = -१$

त्याजकरितां $\sqrt{३ - २\sqrt{२}} = \sqrt{२} - १$ हें उत्तर.

तिसरें, $६ \pm २\sqrt{५}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\sqrt{५} \pm १$

चवथें, $२३ \pm ८\sqrt{७}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $४ \pm \sqrt{७}$

पांचवें, $४ + २\sqrt{३}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $१ + \sqrt{३}$

साहावें, $६ - २\sqrt{५}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\sqrt{५} - १$



बारावा प्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढायाचा.

तो गुणक असा कीं, ज्यानें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड होईल

रीति.

१ जेव्हां करणीचे एक पदाचा किंवा दोन्ही पदांचे मूळ प्रकाशक सम आहेत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें एक चिन्ह बदल करावें, म्हणजे तोच गुणक झाला. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें. त्याप्रमाणें गुणाकारांतही एक चिन्ह बदल करून पुनःपुनः गुणावें, गुणाकारास करणीरूप सुटेपर्यंत.

त्या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणीरूप सुटून अखंडरूप देतां येईल. असें कीं, त्रियुक्पदादि करणीसही एक चिन्ह बदल करावें. चतुर्युक्पदकरणीस दोन चिन्हें बदल करावीं. पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हें बदल करावीं, इत्यादि षड्युक्पदादिकींही.

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळप्रकाशक विषम आहे, तेव्हां रीति याहून अधिक कठीण आहे, परंतु दोन च-

र्गमूळांची बेरीज किंवा वजाबाकी करायास इच्छिला गुणक त्रियुक्पद करणी होईल. हें त्रियुक्पद त्या रीतीनें उत्पन्न होतें कीं, जीं दोन पदें आहेत. त्यांचे वर्ग दोन पदें आणि त्याच पदांचा गुणाकार धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावा. तो तिसरें मध्यपद होतें.

उदाहरणें.

पहिलें, $५ + \sqrt{३}$ त्यांचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

सांगितली करणी $५ + \sqrt{३}$
गुणक $५ - \sqrt{३}$
$२५ + ५\sqrt{३}$
$- ५\sqrt{३} - ३$
$२५ - ३ = २२$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{५} + \sqrt{३}$ त्याचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी $\sqrt{५} + \sqrt{३}$
गुणक $\sqrt{५} - \sqrt{३}$
$५ + \sqrt{५}\sqrt{३}$
$- \sqrt{५}\sqrt{३} - ३$
$५ - ३ = २$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[४]{५}+\sqrt[४]{३}$ त्यांचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

मांगितली करणी $\sqrt[४]{५}+\sqrt[४]{३}$

गुणक $\sqrt[४]{५}-\sqrt[४]{३}$

$\sqrt{५}+\sqrt[४]{१५}$

$-\sqrt[४]{१५}-\sqrt{३}$

$\sqrt{५}-\sqrt{३}$

पुनःगुणक $\sqrt{५}+\sqrt{३}$

$५-\sqrt{१५}$

$+\sqrt{१५}-३$

$५-३=२$ हें उत्तर.

चवथें, $\sqrt[३]{७}+\sqrt[३]{३}$ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी. $\sqrt[३]{७}+\sqrt[३]{३}$

गुणक $\sqrt[३]{७^२}-\sqrt[३]{७\times३}+\sqrt[३]{३^२}$

$७+\sqrt[३]{७^२\times३}$

$-\sqrt[३]{७^२\times३}-\sqrt[३]{७\times३^२}$

$+\sqrt[३]{७\times३^२}+३$

गुणाकार. $७+३=१०$ हें उत्तर.

पांचवें, $\sqrt{५}-\sqrt{क्ष}$ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्यानें

हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

साहावें, $\sqrt{अ} + \sqrt{ब}$ त्यांचा गुणक काढायाचा; ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सातवें, $अ + \sqrt{ब}$ त्यांचा गुणक काढायाचा. ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल

आठवें, $१ + \sqrt[3]{२अ}$ त्यांचा गुणक काढायाचा. ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

नववें, $\sqrt[3]{३} - २\sqrt[3]{२}$ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

तेरावा प्रकार.

ज्या अपूर्णबीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत, त्यांस बद्दल अखंड रूप देण्याचा.

रीति.

१ जेव्हां कोणतेंही एकाकी अपूर्णबीज त्या पद्धतीचें आहे $\frac{ब}{\sqrt{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशांनी म्हणजे एथें $\sqrt{अ}$ यांनी गुणावें, म्हणजे त्याचें रूप त्या पद्धतीचें होईल. $\frac{ब\sqrt{अ}}{अ}$

अथवा जेव्हां तें अपूर्णबीज त्या पद्धतीनें आहे $\frac{ब}{\sqrt[3]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[3]{अ^2}$ यांनीं गुणावे, म्हणजे त्याचें रूप त्या पद्धतीचें होईल. $\frac{ब\sqrt[3]{अ^2}}{अ}$

आणि जेव्हां त्या सामान्य पद्धतीचें रूप आहे $\frac{ब}{\sqrt[न]{अ}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[न]{अ^{न-1}}$ यांनीं गुणावे, म्हणजे त्याचें रूप त्यापद्धतीचें होईल. $\frac{ब\sqrt[न]{अ^{न-1}}}{अ}$

२ जेव्हां अपूर्णबीजाचे छेद संयुक्तकरणी आहेत, तेव्हां पूर्व १२ व्या प्रकाराप्रमाणें गुणक काढावा. असा कीं, ज्यानें ते छेद गुणिले असतां त्यांचें करणीरूप जाऊन अखंडरूप होतील. नंतर अंश आणि छेद त्या गुणकांनीं गुणिले असतां अ

पूर्ण बीजास इच्छिलें अखंडछेदरूप होईल.

उदाहरणें.

पहिलें. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ आणि $\frac{3}{1\sqrt[3]{5}}$ त्या दोन अपूर्णबीजांस अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ हें एक उदाहरणाचें उत्तर.

आणि $\frac{3}{1\sqrt[3]{5}}=\frac{3}{1\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{1\times5}=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{25}$ हें दुसरे उदाहरणाचें उत्तर.

दुसरें, $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ हें उत्तर

तिसरें, $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+2}{9-2}=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}$ अथवा $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\sqrt{2}$ हें उत्तर

चवथें, $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

पांचवें, $\frac{\text{म}}{3+\sqrt{\text{क्ष}}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे

साहावें, $\frac{\text{अ}-\sqrt{\text{ब}}}{\text{अ}+\sqrt{\text{ब}}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

सातवें, $\frac{१०}{अ^{७} - ब^{५}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आठवें, $\frac{३३}{अ^{९} + ब^{१०}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

नववें, $\frac{४}{अ^{४} + ब^{५}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरुप दे.

गणितप्रमाण आणि श्रेढी.

गणितप्रमाण एकजातीचे दोन पदांचे वजाबाकीवरून त्यांचें संबंधि आहे. त्या वजाबाकीस गणितप्रमाणांत उत्तर म्हणतात.

चार पदें गणितप्रमाणांत आहेत असें म्हणतात, जेव्हां पहिलें आणि दुसरें त्यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें त्यांचें उत्तराबरोबर आहे.

जसें २, ७, १२, १६ आणि अ, अ+ब, क, क+ब, परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत.

गणितश्रेढी तीच होय, जी कितीएक पदांची श्रेणी एकच उत्तरानें चढती किंवा उत्तरती आहे.

जसें १, ३, ५, ७, ९, ११, इत्यादि. आणि

अ, अ+ब, अ+२ब, अ+३ब, अ+४ब, अ+५ब इत्यादिं. त्या श्रेणी गणितप्रमाणांत आहेत. ज्यांत प्रथमेचें उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ब आहे.

गणितप्रमाण आणि श्रेढी त्यांचे परमउपयोगी अवयव पूर्वी अंकगणितामध्यें उघड करून सांगितले आहेत, ते बीजगणितामध्यें त्याप्रमाणें लिहितात. जसें,

अतिलहान पद दाखवायास	अ	घे.
अति मोठें पद दाखवायास	ज्ञ	घे.
उत्तर ————————	ड	घे.
गच्छ ————————	न	घे.
सर्वधन ————————	स	घे.

तेव्हां गणितप्रमाणांतील मुख्य गुण त्या पुढील समीकरणांत दाखविला जातो. म्हणजे,.

$$\text{१},\ \text{ज्ञ} = \text{अ} + \text{ड}\cdot(\text{न}-\text{१})$$

$$\text{२},\ \text{अ} = \text{ज्ञ} - \text{ड}\cdot(\text{न}-\text{१})$$

$$\text{३},\ \text{स} = (\text{अ}+\text{ज्ञ})\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{न}$$

$$\text{४},\ \text{स} = (\text{ज्ञ} - \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ड}\cdot\overline{\text{न}-\text{१}})\text{न}.$$

$$\text{५},\ \text{स} = (\text{अ} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{ड}\cdot\overline{\text{न}-\text{१}})\text{न}.$$

आणि जेव्हां प्रथम पद अ = ० आहे, तेव्हां वरचें समीकरणास हें रूप होतें.

ज्ञ=ड·(न−१)

स=$\frac{१}{२}$ न ज्ञ

उदाहरणें.

पहिलें, एक चढती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १ उत्तर २ आणि गछ २९ तीचें सर्वधन काय होईल?

प्रथम, १+२×२०=१+४०=४१ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{१+४१}{२}$ × २१ = २१ × २१ = ४४१ हें इछिलें सर्वधन.

दुसरें, एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १९९ उत्तर ३ आणि गछ ६७ आहे, तीचें सर्वधन काय होईल?

प्रथम, १९९−३ × ६६=१९९−१९८ = १ हें अतिलहान पद

तेव्हां $\frac{१९९+१}{२}$ × ६७ = १०० × ६७ = ६७०० हें इछिलें सर्वधन.

तिसरें, १, २, ३, ४, ५, ६ इत्यादि मूळ संख्यांची श्रेणी, गछ १०० पर्यंत आहे. तीचें सर्वधन काय होईल?

उत्तर, ५०५०

चवथें, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषमसंख्यांची श्रेणी, गछ ९९ पर्यंत आहे, तीचें सर्वधन काय होईल*.

---

* १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकांचे गणितश्रेढीचे न गछपर्यंत

पांचवें, इताल्या मुलकांत वेनीस्या त्या नामें एक शहर आहे, तेथें सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदय पर्यंत, प्रथम १ दुसरे वेळेस २ तिसरे वेळे ३ अशा रीतीनें चोविसावे वेळे २४ पर्यंत घड्याळांत अवर वाजतात. तेव्हां एक दिवसांत अवरांचे टोले किती वाजतात? अवर म्हणजे १ तास अथवा २½ घटिका.

उत्तर, ३०० टोले.

सर्वधन त्या गच्छाचे ($न^{२}$) वर्गाबरोबर आहे. जसें,

जर १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि पदें असतील.

तेव्हां $१^{२}$, $२^{२}$, $३^{२}$, $४^{२}$, $५^{२}$. हीं प्रथम, दुसरें, तिसरें, इत्यादि पदांचीं सर्वधनें होतील. त्याप्रमाणें.

०+१=१ अथवा $१^{२}$ हें प्रथम पदाचें सर्वधन.

१+३=४——$२^{२}$ हें दोन पदांचें सर्वधन.

४+५=९——$३^{२}$ हें तीन पदांचें सर्वधन.

९+७=१६——$४^{२}$ हें चार पदांचें सर्वधन.

१६+९=२५——$५^{२}$ हें पांच पदांचें सर्वधन आहे. इत्यादि.

म्हणून वरचा प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण यानें १+२·(न-१)=१+२न-२=२न-१ म्हणजे हें मोठें पद आहे, तेव्हां गच्छ न आहे; या मोठे पदाशीं प्रथम पद १ मिळवून दोन शेवटपदांची बेरीज २ नही होईल, अथवा त्या बेरजेचें अर्ध न होईल; तेव्हां वरचे तिसरे समीकरणानें स सर्वधन=न·न=$न^{२}$. यावरून स्पष्ट होतें कीं, सर्वदा दोन शेवटांचे बेरिजेचें अर्ध आणि गच्छ एकच आहे; आणि सर्वधन व त्या गच्छाचा वर्ग ($न^{२}$) एकच आहे.

साहावें, २, ४, ६, ८, १०, १२ इत्यादि त्या समपदश्रेणींत ३६५ वें पद काय आहे?

उत्तर, ७३०

सातवें, गणितश्रेढींतील एक उतरती श्रेणी आहे, जिचें प्रथम पद १० उत्तर ३ आणि गच्छ २१ तीचें सर्वधन किती होईल?

उत्तर १४०

आठवें, एके सरळरेषेंत एक एक यार्डाचे अंतरानें १०० खडे ठेविले आहेत, आणि प्रथम खड्यापासून एक यार्डाचे अंतरानें पांटी ठेविली आहे, आणि एक मनुष्यास आज्ञा झाली कीं, त्यानें एकेक खेपेस त्या खड्यांतील एक एक खडा त्या पांटींत टाकावा. तेव्हां सर्व खडे त्या पांटींत पर्यंत त्या मनुष्यास किती चालावें लागेल?

उत्तर, मैल. यार्ड. ५ .. १३००

गणितश्रेढीचें व्यवहारी संगतीकरण.

उदाहरणें.

पहिलें, एक पलटन त्रिकोणाकृति उभें आहे; त्याचे पहिले ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत ३ तिसरींत ५ अशा रीतीनें चढत्या तीन ओळी आहेत, तर त्या त्रिकोणाकृति पलटणांतील स

र्व मनुष्यें किती होतील ?

उत्तर, ९०० मनुष्यें.

दुसरें, फौजेंतील एके टोळीस सर्कारआज्ञा झाली कीं, त्यांनीं पुढें सांगतों अशा मजला करून १२ दिवसांत एके अमुक गांवीं पोंचावें, त्यांत प्रथम दिवशीं ६ मैल, दुसरे दिवशीं १०½ मैल इत्यादि प्रत्यहीं ४½ मैल अधिक त्याप्रमाणें, तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं किती मैल चालावें लागेल, आणि सर्व मजला मिळून किती मैल होतील?

उत्तर, ५५½ मैल शेवटील मजल
आणि ३६९ मैल सर्व मिळून

तिसरें, एके किल्यास वेढा देऊन फौज बसली होती, त्यांतील इंजनेरांचे एक ब्रिगेडानें* तो किल्ला घेण्यास आरंभ

---

* ब्रिगेड म्हणजे जमाव, इंजनेरांचे एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्यें असतात, ज्यांच्या दोन टोळ्या करितात, जेव्हां एक टोळी हातांनीं काम करून साप वाढविते, तेव्हां दुसरी टोळी त्यास सामान पुरविते. आणि जेव्हां प्रथम टोळी थकली तेव्हां तिचे बदली दुसरी टोळी काम करिते. तें अशा रीतीनें कीं, ते सर्व आपआपले पाळीप्रमाणें सापाचे शिरावर काम करितात; साप म्हणजे खाडा, ज्याची रुंदी ३ फूट आणि ओंडी ४ फूट. याशिवाय या कामांत दुसरे खाडे करितात. ज्यांची रुंदी १० फूटपासून १५ फूटपर्यंत असते. त्यांस पेंच म्हणतात.

केला; प्रथम रात्री त्यानें १५ यार्ड साप खणिला, दुसरे रात्रीस १३ यार्ड, इत्यादि प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केलें, आणि सर्व मिळून साप किती यार्ड खणिला तें सांग.

उत्तर. { ७ रात्री काम केलें.
{ ६३ यार्ड साप खणिला.

चौथें, किती एक गेबीयन* साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे कीं, प्रति ओळीचे गेबीयनांचे संख्येचें उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत ९ गेबीयन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेबीयन किती आणि प्रति ओळीचे गेबीयनसंख्येंत अंतर किती तें सांग.

उत्तर { १ गेबीयन प्रति ओळीचें अंतर.
{ ३९ गेबीयन साहा ओळी मिळून

---

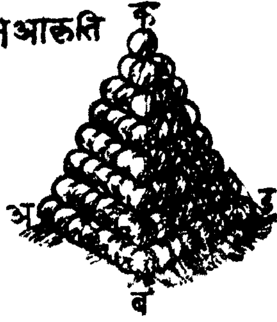
* गेबीयन म्हणजे कणग्यासारखी शिलिंदरळूपाची वेत अथवा चिंबी इत्यादिकांनीं केलेली टोपली आहे. जिचीं दोनही तोंडें उघडीं असतात। त्यांत जिचा व्यास २ फूट आणि उंची ३ फूट, त्या टोपल्या मेंचाचे बाजूवर ठेवून त्यांत माती भरतात; आणि जिचा व्यास व उंची याहून अधिक आहे, त्या मोरचे इत्यादि कामांत उपयोगी आहेत; तसें जिचा व्यास आणि उंची याहून उणी आहे, त्या लहान कामांत उपयोगी आहेत, परंतु या जातीच्या टोपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

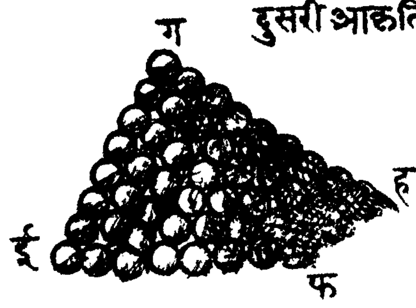
पांचवें, दोन फौजांच्या टोळ्या १११ मैलांचे अंतरानें होत्या; नंतर जें एक चांगलें स्थळ दोहीं टोळ्यांपासून बरोबर अंतरानें होतें, तेथें जाऊन राहावें असें दोहोंचे चित्तीं येऊन निघाल्या, परंतु वेगळाले समयांत; प्रथम टोळी प्रत्यहीं पूर्व दिवसापेक्षां ४ $\frac{१}{२}$ मैल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी टोळी ६ साहा मैल अधिक, दोन टोळ्या त्या चांगले स्थळीं एकदांच येऊन पावल्या; म्हणजे प्रथम टोळी कुच केले दिवसापासून पांचवे दिवशीं, आणि दुसरी टोळी कुच केले दिवसापासून चवथे दिवशीं, तेव्हां प्रतिटोळीनें प्रतिदिवशीं किती मैल मजल केली तें सांग.

उत्तर { प्रथम टोळीची श्रेढी. २ $\frac{१}{१०}$, ६ $\frac{६}{१०}$, ११ $\frac{१}{१०}$, १५ $\frac{६}{१०}$, २० $\frac{१}{१०}$
दुसरे टोळीची श्रेढी. ४ $\frac{७}{८}$, १० $\frac{७}{८}$, १६ $\frac{७}{८}$, २२ $\frac{७}{८}$

सम आकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशीचें गणित.

तोफेचे गोळ्यांच्या राशी बहुत करून तीन रीतींहीं करितात, त्यांस पायांचे आकृतींवरून वेगळालीं नामें होतात. पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि म्हणतात; पाया चौरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काटकोनचौकोन असल्यास काटकोनचौकोन राशि.

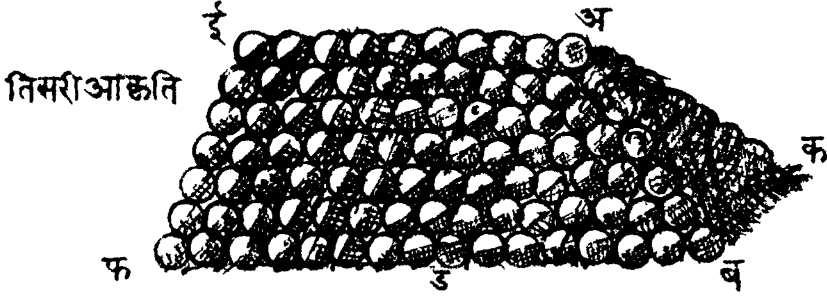




अ ब क ड प्रथम आकृति त्रिकोण राशि आहे.

ई फ ग ह दुसरी आकृति चौरस राशि आहे.

अ ब क ड ई फ तिसरी आकृति काटकोन चौकोन राशि आहे.



गोळ्यांचे त्रिकोणाकृति थर एकावर एक रचिल्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होते; अशा रीतीनें कीं, प्रतिथराची एकेक बाजू आरंभापासून एकेक गोळ्यानें उणी होत जाते; अशी कीं, शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो

गोळ्यांचे चौरस थर एकावर एक रचिल्यापासून चौरस राशि उत्पन्न होते, अशा रीतीनें कीं, प्रतिथराचे एकेक बाजूस आरंभापासून एकेक गोळा उणा होत जातो. असा कीं, शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो.

त्रिकोण आणि चौरस राशीमध्यें, बाजू किंवा मुखें समबाजू त्रिकोण आहेत; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, जिचें प्रथम पद १ शेवटील पद आणि गच्छ पायाचे थरांतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर; कारण, थरांची संख्या अथवा आकृतीचे कोणतेही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदां पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर आहे; त्रिकोणअथवा चौरस राशीच्या बाजू किंवा मुखें त्यास गणितत्रिकोण म्हणतात; आणि त्या गणितत्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्येस त्रिकोणसंख्या म्हणतात; **अबक** प्रथम आकृतींतील आणि **ईफग** दुसरे आकृतींतील गणितत्रिकोण आहेत.

काटकोनचौकोन राशि कल्पनें करून त्याप्रमाणें उत्पन्न होतें, म्हणजे **अबकड** चौकोनराशीवर **अड** मुख किंवा बाजूवर तितके गणितत्रिकोण ठेविले. जितके पायाचे **बड** बाजूचे बाहेर त्याच बाजूंत गोळे आहेत; ते सर्व त्या मुखाचे बरोबर आहेत, आणि त्या गणितत्रिकोणांची संख्या सर्वदां

त्याचे बरोबर आहे, जे वरचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा. अथवा पायाचे लहान आणि मोठे बाजूचे वजाबाकी बरोबर आहे.

साहावें, अ ब क ड प्रथम आकृति म्हणजे त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथक्करण, सांगितले राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत, आणि ते प्रत्येकीं समबाजुत्रिकोण आहेत, म्हणून त्या प्रत्येकांतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, ज्यांचें प्रथम पद, शेवटील पद, आणि गच्छ हीं कळलीं आहेत; त्यापासून निघतें कीं, त्या आठ थरांची अथवा आठ श्रेढींची बेरीज त्या त्रिकोणराशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे; तेव्हां,

त्रिकोणराशींतील प्रथम अथवा

खालचे त्रिकोणथरांतील गोळ्यांची संख्या $= (८+१) \times ४ = ३६$

दुसरा $= (७+१) \times ३\frac{१}{२} = २८$

तिसरा $= (६+१) \times ३ = २१$

चौथा $= (५+१) \times २\frac{१}{२} = १५$

पांचवा $= (४+१) \times २ = १०$

साहावा $= (३+१) \times १\frac{१}{२} = ६$

सातवा $= (२+१) \times १ = ३$

आठवा $= (१+१) \times \frac{१}{२} = १$

गोळे सांगितले राशींतील. बेरीज १२०

सातवें, ई फ ग ह दुसरी आकृति, त्या चौरस राशीं तील गोळ्यांची संख्या काढ. जिचे ई फ खालचे थराचे ओळींत आठ गोळे आहेत.

पृथक्करण,

खालचे ओळींत गोळे ८ आहेत, आणि तिचे वरचींत ७ च आहेत; म्हणून त्या ओळी त्या श्रेढींत आहेत ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ त्यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थरांचें वर्गमूळ आहे ज्या थरापासून चौरस राशि उत्पन्न झाली; त्यापासून निघतें कीं, त्या मूळ पदांचे वर्गांची बेरीज इच्छिली गोळ्यांची संख्या आहे; म्हणजे वर्गांची बेरीज $८^२ + ७^२ + ६^२ + ५^२ + ४^२ + ३^२ + २^२ + १^२ = २०४$ आहेत. हे सांगितले राशींतील इच्छिले गोळे झाले.

आठवें, अ ब क ड ई फ तिसरी आकृति: त्या काटकोनचौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ. जींत ब फ = १६ आणि ब क = ७

पृथक्करण, इच्छिली काटकोनचौकोन राशि, अ ब क ड चौरसराशि, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे आहेत; आणि त्याशिवाय ९ गणितत्रिकोण, ज्यांचे आदि अंत आणि गच्छ कळले आहेत, त्यांनींमिळून झाला आहे, त्या-

अकरितां जर चौरस राशीचे गोळ्यांची संख्या = १४०
त्यांत श्रेढींची बेरीज मिळाली = २५२

सर्व मिळून फादकोन चौकोन राशींतील गोळयांची संख्या = ३०२ गोळे.

पहिली टीप.

त्या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोणराशि आणि चौकोन राशि आणखीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढितां येईल; अ कोष्टक खालचे थराचे एक ओळीचे गोळ्यांची संख्या १ त्यापासून ४० पर्यंत दाखवितो; ब कोष्टक त्रिकोण संख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या; क कोष्टक त्रिकोणसंख्यांची बेरीज दाखवितो; म्हणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बेरीज, ज्या संख्यांस बहुतेक शंकुसंख्या म्हणतात; ड कोष्टक अ कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो; म्हणजे प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या; आणि ई कोष्टक त्या चौरस थरांची बेरीज अथवा चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

क	ख	अ	उ	ई
शंकुसंख्या	त्रिकोणसंख्या	मूळअंक	मूळ अंकांचे वर्ग.	त्या वर्गांची बेरीज
१	१	१	१	१
४	३	२	४	५
१०	६	३	९	१४
२०	१०	४	१६	३०
३५	१५	५	२५	५५
५६	२१	६	३६	९१
८४	२८	७	४९	१४०
१२०	३६	८	६४	२०४
१६५	४५	९	८१	२८५
२२०	५५	१०	१००	३८५
२८६	६६	११	१२१	५०६
३६४	७८	१२	१४४	६५०
४५५	९१	१३	१६९	८१९
५६०	१०५	१४	१९६	१०१५
६८०	१२०	१५	२२५	१२४०
८१६	१३६	१६	२५६	१४९६
९६९	१५३	१७	२८९	१७८५
११४०	१७१	१८	३२४	२१०९
१३३०	१९०	१९	३६१	२४७०
१५४०	२१०	२०	४००	२८७०
१७७१	२३१	२१	४४१	३३११
२०२४	२५३	२२	४८४	३७९५
२३००	२७६	२३	५२९	४३२४
२६००	३००	२४	५७६	४९००
२९२५	३२५	२५	६२५	५५२५
३२७६	३५१	२६	६७६	६२०१
३६५४	३७८	२७	७२९	६९३०
४०६०	४०६	२८	७८४	७७१४
४४९५	४३५	२९	८४१	८५५५
४९६०	४६५	३०	९००	९४५५
५४५६	४९६	३१	९६१	१०४१६
५९८४	५२८	३२	१०२४	११४४०
६५४५	५६१	३३	१०८९	१२५२९
७१४०	५९५	३४	११५६	१३६८५
७७७०	६३०	३५	१२२५	१४९१०
८४३६	६६६	३६	१२९६	१६२०६
९१३९	७०३	३७	१३६९	१७५७५
९८८०	७४१	३८	१४४४	१९०१९
१०६६०	७८०	३९	१५२१	२०५४०
११४८०	८२०	४०	१६००	२२१४०

म्हणून जर त्रिकोणराशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १९ गोळे असतील, तर सर्व राशींतील गोळे १३३० होतील; आणि तसेच चौरस राशींतील गोळे २४७० होतील; त्या रीतीनें ही चौरस किंवा त्रिकोण राशींच्या संख्या सांगितल्या असतां त्यांनें खालचे थराचे ओळीची संख्या कळेल.

पूर्वकोष्टकापासून काटकोनचौकोनराशीची ही संख्या थोडक्यानें कळेल, ज्यांत लहान बाजूंत ४० पेक्षां अधिक गोळे नसतील; तसे लहान आणि मोठी त्या बाजूंची वजाबाकी ४० पेक्षां अधिक नसेल. जसे एक काटकोनचौकोन राशीचे लहान बाजूंत १५ आणि मोठे बाजूंत ३५ गोळे असतील; आरंभी चौकोन राशीची म्हणजे कल्पनेनें जीपासून काटकोनचौकोन राशि झाली आहे, तिची संख्या कोष्टकांतून काढावी; म्हणजे एक चौरसराशीची संख्या काढावी, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत; म्हणजे ही कोष्टकांत १२४० आहे. नंतर गणितत्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १५ आहे त्याचे समोरची त्रिकोणसंख्या १२० त्यास २० नीं गुणावें; कारण, चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत. नंतर त्यांस चौरस राशीची संख्या मिळवावी, म्हणजे १२०×२०+१२४०=२४००+१२४०=३६४० ही सांगितले काटकोनचौकोनराशींतील गोळ्यांची इच्छिली संख्या झाली.

दुसरीटीप

पुढील बीजाचे सारणीकोष्टक कोणतेही राशींतील गोळ्यांची संख्या स्वल्प श्रमानें आणि लवरेनें काढायास कामांत येतात.

त्रिकोणराशीचें गणित करायास हा सारणी कोष्टक आहे. } $\frac{(न+२)\times(न+१)\times न}{६}$

चौरसराशीचें गणित करायास हा सारणी कोष्टक आहे. } $\frac{(न+१)\times(२न+१)\times न}{६}$

ह्या प्रत्येकांत न अक्षर खालचे थराचे एक ओळीची संख्या दाखवितें; म्हणजे जिचे खालचे थराचे एक ओळांत गोळे ३० आहेत, त्या त्रिकोणराशीमध्यें सगळी संख्या हीच होईल.
$\frac{(३०+२)\times(३०+१)\times ३०}{६}$ = ४९६० गोळे

चौरसराशीमध्यें, जिचे खालचे थराचे एक ओळांत गोळे ३० आहेत तिची संख्या हीच होईल. $\frac{(३०+१)\times(६०+१)\times ३०}{६}$ = ९४५५ गोळे

काटकोनचौकोनराशीचा सारणीकोष्टक हा आहे, $\frac{(२न+१+३म)\times(न+१)\times न}{६}$ ज्यांत न अक्षर थरांची संख्या दाखवितें, आणि म अक्षर वरचे थरांची एकोनसंख्या दाखवितें. जसें, एक काटकोनचौकोनराशीमध्यें ३० थर आहेत, आणि वरचे

थरांत ३१ गोळे आहेत. $\frac{(६०+१+९०)\times(३०+१)\times३०}{६}$ = २३४०५ गोळे.

तिसरीटीप

एक उपयोगी रीति सुगम आहे. जिनें तीन प्रकारच्या पुऱ्या राशि म्हणजे त्रिकोणराशि, चौरसराशि, आणि काटकोनचौकोनराशि, त्यांतील गोळ्यांची संख्या निघते. म्हणून आरंभीं तिसरे आकृतीवर लक्ष्य ठेवून कर, तेव्हां,

(बड+अ+क) × $\frac{१}{३}$ बडक = त्रिकोणराशींतील गोळ्यांची संख्या.

(ईफ + ईफ + ग) × $\frac{१}{३}$ गफह = चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या.

(बफ + बफ + अई) × $\frac{१}{३}$ अबक = काटकोनचौकोनराशींतील गोळ्यांची संख्या.

यांवरून एक सामान्य रीति निघते. पायाचे बाजूचे एके ओळींत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तिशीं समांतर दुसरेकडील बाजूचे ओळींतील संख्या, (ती एक किंवा अनेक असतील) आणि पायाशीं समांतर राशि शिरओळींतील संख्या, अशा त्या तीन संख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिर्कस

बाजूंतील, गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयांशानें गुणावी, तो गुणाकार राशींतील इच्छिली संख्या होईल.

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.

भूमितिप्रमाण म्हणजे एक पद दुसरे पदाचा काय भाग आहे, अथवा काय गुणक आहे; अथवा एक पद दुसरे पदांत कितीवेळां जातें, असा विचार करितां पदसंबधि आहे.– परस्पर मिळविले दोन पदांतील प्रथमपदास अग्रसर म्हणतात, आणि दुसरे पदास उपाग्रसर. त्याचें गुणोत्तर म्हणजे भागाकार आहे, जें एक दुसऱ्यानें भागून उत्पन्न होतो.

चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां दोन युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे, अथवा जेव्हां प्रथमपद दुसरे पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे, तसाच तिसरें चौथ्याचा. जसें, ३, ६, ४, ८ आणि अ, अर, ब, बर, हीं भूमितिप्रमाणांत आहेत.

कारण $\frac{६}{३} = \frac{८}{४} = २$ आणि $\frac{अर}{अ} = \frac{बर}{ब} = र$, आणि त्यांस या रीतीनें लिहितात. जसें, ३ : ६ : : ४ : ८, इत्यादि अंकगणितामध्यें पहा.

भूमितिश्रेढी तीच होय. जींतील सर्व पदांचे गुणोत्तर अ नुक्रमानें एकच आहे. जसें, १, २, ४, ८, १६, इत्यादि ज्यांत गुणोत्तर २ आहे.

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे कीं, कोणतेही दोन पदांचा गुणाकार, अथवा कोणतेही एक पदाचा वर्ग, प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे. जीं दोन पदें त्यांपासून बराबर अंतरानें दोहोंकडून घेतलीं आहेत. म्हणजे जसें त्या पदांतील १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४ इत्यादि १×६४= २×३२=४×१६=८×८=६४

कोणतेही भूमितिश्रेढींतील जर

अ, अति लहान पद दाखवितो

ह, अति मोठें पद ——————

र, गुणोत्तर ——————

न, गच्छ ——————

स. सर्वधन ——————

जेव्हां त्या पदांतील कोणतेही एक पदाची किंमत दुसरे पदांचे किमतीपासून निघेल. त्या पुढील सामान्यसमीकरणावरून.

१, $र = \left(\frac{ह}{अ}\right)^{\frac{1}{न-१}}$

२, $ह्र = अ \times र^{न-१}$

३, $अ = \frac{ह्र}{र^{न-१}}$

४, $न = \frac{ला \cdot \frac{र ह्र}{अ}}{ला \cdot र} = \frac{ला \cdot र + ला \cdot ह्र - ला \cdot अ}{ला \cdot र}$

५, $स = \frac{र^{न} - १}{र - १} \times अ = \frac{र^{न} - १}{र - १} \times \frac{ह्र}{र^{न-१}} = \frac{र ह्र - अ}{र - १}$

जेव्हां श्रेणी अनंत आहे, तेव्हां अतिलाहान पद अशून्य आहे, आणि सर्वधन $स = \frac{र ह्र}{र-१}$ होतें.

कोणतेही चढते भूमितिश्रेणीमध्यें अथवा कोणतेही श्रेढीमध्यें ज्याचा आरंभ १ पासून होतो, तर तिसरें, पांचवें, सातवें, इत्यादि पदें वर्ग होतील. चौथें, सातवें, दाहावें, इत्यादि पदें घन होतील; आणि सातवें वर्ग आणि घन ही होईल. जसें त्या श्रेणींत १ र, $र^{२}$, $र^{३}$, $र^{४}$, $र^{५}$, $र^{६}$, $र^{७}$, $र^{८}$, इत्यादि. $र^{२}$ $र^{४}$, $र^{६}$, $र^{८}$, हे वर्ग आहेत; $र^{३}$ $र^{६}$ $र^{९}$ हे घन आहेत; आणि $र^{६}$ हा वर्ग आणि घन ही आहे.

उतरतीश्रेढीमध्यें गुणोत्तर र अपूर्ण आहे, आणि तेव्हां $स = \frac{१-र^{न}}{१-र}$ अ.

जर न अनंत असेल, तर $स = \frac{अ}{१-र}$ त्यांत अ प्रथमपद दाखवितो.

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत. जसें, अ, अर,

व, वर, अथवा २, ६, ४, १२, तेव्हां त्या पदांचीं पुढील कोणतीं ही रूपें परस्पर प्रमाणांत होतील.

१ समरीतीनें अ:अर::ब:बर, अथवा २:६::४:१२

२ व्यस्त —— अर:अ::बर:ब, —— ६:२::१२:४

३ परावर्त —— अ:ब::अर:बर, —— २:४::६:१२

४ संयुक्त —— अ:अ+अर::ब:ब+बर, २:८::४:१६,

५ वियुक्त —— अ:अर-अ::ब:बर-ब, २:४::४:८

६ मिश्र —— अर+अ:अर-अ::बर+ब:बर-ब ८:४::१६:८

७ गुणाकार —— अक:अरक::ब:बर —— २×३:६×३::४:१२

८ भागाकार —— $\frac{\text{अ}}{\text{क}}:\frac{\text{अर}}{\text{क}}$::ब:बर —— १:३::४:१२

९ अ, ब, क, ड, हीं चार पदें समस्वर प्रमाणांत आहेत. जेव्हां अ:ड::अ-ब:क-ड. अथवा जेव्हां तीं व्युत्क्रम पदें, $\frac{1}{\text{अ}}$, $\frac{1}{\text{ब}}$, $\frac{1}{\text{क}}$, $\frac{1}{\text{ड}}$ गणितप्रमाणांत आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद १ आहे, गुणोत्तर २. आणि गच्छ १२, हिचें सर्वधन काय होईल?

आतां $\text{१} \times \text{२}^{\text{११}}$ = १×२०४८ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{\text{२०४८} \times \text{२} - \text{१}}{\text{२} - \text{१}} = \frac{\text{४०९६} - \text{१}}{\text{१}}$ = ४०९५ हें इच्छिलें सर्वधन.

दुसरें, एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद $\frac{१}{३}$ आहे, गुणोत्तर $\frac{१}{२}$, आणि गछ ८, तिचें सर्वधन काय होईल?

आतां $\frac{१}{३} \times (\frac{१}{२})^{७} = \frac{१}{३} \times \frac{१}{१२८} = \frac{१}{३८४}$ हें अतिमोठें पद.

तेव्हां $(\frac{१}{३} - \frac{१}{३८४} \times \frac{१}{२}) \div (१ - \frac{१}{२}) = (\frac{१}{३} - \frac{१}{७६८}) \div \frac{१}{२} = \frac{२५५}{७६८} \times \frac{२}{१} = \frac{२५५}{३८४}$ हें इछिलें सर्वधन.

तिसरें, १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गछ २०, त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १०४८५७५

चवथें, १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१}{१६}$, $\frac{१}{३२}$, इत्यादि गछ ८, त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १ $\frac{१२७}{१२८}$

पांचवें, १, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{९}$, $\frac{१}{२७}$, $\frac{१}{८१}$, इत्यादि गछ १०, त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १ $\frac{९८४१}{१९६८३}$

साहावें, १, २, ४. ८, १६, ३२, इत्यादि गछ १०० त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १२६७६५०६००२२८२२९४०१४९६७०३२०५३७५

सातवें, कोणाएका मनुष्याजवळ बहुत चांगला एक घोडा होता, तो कोणी हौशी मनुष्यानें पाहून विकत मागि-

तला, तेव्हां त्यानें आपली प्रतिज्ञा सांगितली कीं, त्याचे चार नाल मिळून चुका ३२ आहेत, त्यास प्रथम चुकेस १ रेस ५ पुढें एकेक चुकेस त्याचे त्याचे दुपटीनें वाढते, त्याचे रुपये जे होतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळेल म्हणून, त्या प्रमाणें त्या होशिस तो घोडा घेणें तर किती रुपये द्यावे लागतील ?

रु० पा० रे०
उत्तर, ५३६८७०९१ : ० : ७५

अनंतश्रेणी.

ही अनंतश्रेणी, ज्यांत संयुक्तपद भाजक आहे, अशा भागाकारापासून आणि संयुक्तकरणीपदाचें मूळ काढिल्यापासून उत्पन्न होते. अथवा दुसरे कांहीं सामान्यरीतीनें. आणि किती ही वाढविली तरी अंत पावत नाहीं. जसे अपूर्णांकगणितांत दशांश.*

---

* या अनंतश्रेणीची रीति डांकतर वाल्लिससाहेब यांनीं प्रथम कामांत आणिली. आणि संन १६९७ इसवीमध्यें त्यांनीं गणितपुस्तकें छापिलीं. त्यांत $\frac{अ}{१-र}$ हें अपूर्णबीज चालते भागाकारानें भागतां भागतां ही अनंतश्रेणीरीति उत्पन्न केली. $अ + अर + अर^{२} + अर^{३} + अर^{४} +$ इत्यादि.

परंतु कितीएक पदें प्रथम उत्पन्न करून, श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल, आणि तत्पश्चिलाचा श्रम केल्यावांचून अशा रीतीनें श्रेणी पुढें चालवितां येईल.

प्रथमकृत्य.

अपूर्णपदास भागाकारानें अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

रीति.

भागाकाररीतिनें अंश छेदांनीं भागावे; आणि हें भागाकारकृत्य इच्छा आहेपर्यंत वाढवावें, म्हणजे इच्छिली अनंत श्रेणी उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{२अब}{अ+ब}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

$$अ+ब)\ २अब\ (\ २ब-\frac{२ब^२}{अ}+\frac{२ब^३}{अ^२}-\frac{२ब^४}{अ^३}+ इत्यादि.$$

$$\underline{२अब+२ब^२}$$

$$-२ब^२$$

$$\underline{-२ब^२-\frac{२ब^३}{अ}}$$

$$+\frac{२ब^३}{अ}$$

$$\underline{+\frac{२ब^३}{अ}+\frac{२ब^४}{अ^२}}$$

$$-\frac{२ब^४}{अ^४}$$

$$-\frac{२ब^४}{अ^४}-\frac{२ब^५}{अ^५}$$

$$+\frac{२ब^५}{अ^५}$$ इत्यादि

दुसरें, $\frac{१}{१-अ}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

$$१-अ)१(१+अ+अ^२+अ^३+अ^४+ \text{इत्यादि}$$

$$१-अ$$

$$+अ$$

$$+अ-अ^२$$

$$+अ^२$$

$$+अ^२-अ^३$$

$$+अ^३$$

$$+अ^३-अ^४$$

$$+अ^४$$ इत्यादि.

तिसरें, $\frac{ब}{अ+क}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{ब}{अ}\times(१-\frac{क}{अ}+\frac{क^२}{अ^२}-\frac{क^३}{अ^३}+ \text{इत्यादि})$

चौथें, $\frac{अ}{अ-ब}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१+\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{\text{ब}^२}{\text{अ}^२}+\frac{\text{ब}^३}{\text{अ}^३}+$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{१-\text{क्ष}}{१+\text{क्ष}}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१-२\text{क्ष}+२\text{क्ष}^२-२\text{क्ष}^३+२\text{क्ष}^४-$ इत्यादि.

साहावें, $\frac{\text{अ}^२}{(\text{अ}+\text{ब})^२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१-\frac{२\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{३\text{ब}^२}{\text{अ}^२}-\frac{४\text{ब}^३}{\text{अ}^३}+$ इत्यादि.

सातवें, $\frac{१}{१+१}=\frac{१}{२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

दुसरें कृत्य.

संयुक्तकरणीपदास अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें:

रीति

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें, आणि हें मूळकृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें, म्हणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल; परंतु ही रीति वर्गमूळ काढायास उपयोगी आहे. त्याहून मोठे घातानें मूळ काढायास बहुत श्रम पडतो.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{अ}^२-\text{क्ष}^२$ त्याचें अनंतश्रेणींत मूळ काढ.

$अ^२ - क्ष^२ \left(अ - \frac{क्ष^२}{२अ} - \frac{क्ष^४}{८अ^३} - \frac{क्ष^६}{१६अ^५} - \frac{५क्ष^८}{१२८अ^७} \right.$ इत्यादि.

$$\begin{array}{ll}
 & अ^२ \\
२अ - \frac{क्ष^२}{२अ} &) - क्ष^२ \\
 & - क्ष^२ + \frac{क्ष^४}{४अ^२} \\ \hline
२अ - \frac{क्ष^२}{अ} - \frac{क्ष^४}{४अ^३} &) - \frac{क्ष^४}{४अ^२} \\
 & - \frac{क्ष^४}{४अ^२} + \frac{क्ष^६}{८अ^४} + \frac{क्ष^८}{६४अ^६} \\ \hline
२अ - \frac{क्ष^२}{अ} - \frac{क्ष^४}{४अ^३} - \frac{क्ष^६}{१६अ^५} &) - \frac{क्ष^६}{८अ^४} - \frac{क्ष^८}{६४अ^६} \\
 & - \frac{क्ष^६}{८अ^४} + \frac{क्ष^८}{१६अ^६} + \frac{क्ष^{१०}}{६४अ^८} + \frac{क्ष^{१२}}{२५६अ^{१०}} \\ \hline
 & - \frac{५क्ष^८}{६४अ^६} \quad \text{इत्यादि.}
\end{array}$$

दुसरें, $\sqrt{१+१} = \sqrt{२}$ त्यास अनंतश्रेणीत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{१}{२} - \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

तिसरें, $\sqrt{१-१}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर. $१ - \frac{१}{२} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

चौथें, $\sqrt{अ^२ + क्ष}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

पांचवें, $\sqrt{अ^२ - २बक्ष - क्ष^२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

निसरें कृत्य.

कोणतेही द्वियुग्मपदाचें मूळ काढायाचें, अथवा द्वियु-

व्यद्करणीस अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

हें रूप पुढील सारणीकोष्टकांपासून होतें, असें कीं, त्यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुग्मपदाचीं अक्षरें ठेविल्यानें म्हणजे,

$$(प+पक)^{\frac{म}{न}} = प^{\frac{म}{न}} + \frac{म}{न}\,अक + \frac{म-न}{२न}\,बक + \frac{म-२न}{३न}\,कक + इत्यादि.$$

प, प्रथम पद दाखविता.

क, दुसरें पद प्रथमानें भागिलें तें दाखविता.

$\frac{म}{न}$, घातकिंवा मूळ त्यांचा प्रकाशक दाखविता.

अ, ब, क, ड, इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वीचीं पदें दाखवितात.

उदाहरणें.

पहिलें, $अ^२+ब^२$ त्यांचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

एथें. $प=अ^२$, $क=\frac{ब^२}{अ^२}$, $\frac{म}{न}=\frac{१}{२}$; त्याजकरितां

$प^{\frac{म}{न}}=(अ^२)^{\frac{१}{२}}=अ=अ$ हें श्रेणीचें प्रथमपद.

$\frac{म}{न}\,अक=\frac{१}{२}\times अ\times\frac{ब^२}{अ^२}=\frac{ब^२}{२अ}=ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{म-न}{२न}\,बक=\frac{१-२}{४}\times\frac{ब^२}{२अ}\times\frac{ब^२}{अ^२}=-\frac{ब^४}{२.४अ^३}=क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ कक $= \frac{१-४}{६} \times -\frac{ब^२}{२\cdot४अ^३} \times \frac{ब}{अ^२} = \frac{३ब^३}{२\cdot४\cdot६अ^५} = ड$ हें श्रेणीचें चौथें पद आहे.

त्याजकरितां $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब^२}{२\cdot४अ^३} + \frac{३ब^३}{२\cdot४\cdot६अ^५} -$ इत्या॰

अथवा, $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब^२}{८अ^३} + \frac{ब^३}{१६अ^५} - \frac{५ब^४}{१२८अ^७} +$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{(अ-क्ष)^२}$ अथवा त्याचे बरोबर किंमतीचें $(अ-क्ष)^{-२}$* त्याची अनंतश्रेणींत किंमत काढ.

एथें $प = अ$, $क = -\frac{क्ष}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{-२}{१} = -२$; त्याजकरितां $प^{\frac{म}{न}} = अ^{-२} = \frac{१}{अ^२} = अ$, हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{म}{न}$ $अक = -२ \times \frac{१}{अ^२} \times -\frac{क्ष}{अ} = \frac{२क्ष}{अ^३} = २अ^{-३}क्ष = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

---

* ही रीति अपूर्णबीजावर लावायास पुढें सांगतो, त्या प्रकारें सुगम करावी. तो प्रकार, आधीं हें समजायास योग्य कीं, कोणतीही करणी छेदस्थकांतून अंशस्थळीं आणणें अथवा अंशस्थकांतून छेदस्थळीं नेणें हें तिचें प्रकाशकचिन्ह बदल करून शक्य आहे. जसें, $क्ष^{२} = १ \times क्ष^{-२}$ अथवा $क्ष^{-२}$, इतकें मात्र; आणि $\frac{१}{(अ+ब)^२} = १ \times (अ+ब)^{-२}$ अथवा $(अ+ब)^{-२}$ इतकें मात्र, आणि $\frac{अ^२}{(अ+क्ष)^२} = अ^२(अ+क्ष)^{-२}$; आणि $\frac{क्ष^{\frac{१}{२}}}{क्ष^{\frac{३}{२}}} = क्ष^{\frac{१}{२}} \times क्ष^{-\frac{३}{२}}$; आणि $\frac{(अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}}}{(अ^२-क्ष^२)^{\frac{१}{२}}} = (अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}} \times (अ^२-क्ष^२)^{-\frac{१}{२}}$ इत्यादि.

$\frac{म-न}{२न}$ बक $= -\frac{३}{२} \times \frac{२क्ष}{अ^{३}} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} = ३अ^{-४}क्ष^{२} = क$
हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ कक $= -\frac{४}{३} \times \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{४क्ष^{३}}{अ^{५}} = ४अ^{-५}क्ष^{३} = ड$
हें श्रेणीचें चोथें पद.

तेव्हां $अ^{-२} + २अ^{-३}क्ष + ३अ^{-४}क्ष^{२} + ४अ^{-५}क्ष^{३} +$ इत्यादि.

अथवा, $\frac{१}{अ^{२}} + \frac{२क्ष}{अ^{३}} + \frac{३क्ष^{२}}{अ^{४}} + \frac{४क्ष^{३}}{अ^{५}} + \frac{५क्ष^{४}}{अ^{६}}$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{अ^{२}}{अ-क्ष}$ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + क्ष + \frac{क्ष^{२}}{अ} + \frac{क्ष^{३}}{अ^{२}} + \frac{क्ष^{४}}{अ^{३}} + \frac{क्ष^{५}}{अ^{४}}$ इत्यादि.

चोथें, $\frac{१}{\sqrt{अ^{२}+क्ष^{२}}}$ अथवा $\frac{१}{(अ^{२}+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}}$ त्याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $\frac{१}{अ} - \frac{क्ष^{२}}{२अ^{३}} + \frac{३क्ष^{४}}{८अ^{५}} - \frac{५क्ष^{६}}{१६अ^{७}}$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{अ^{२}}{(अ-ब)^{२}}$ त्यांस अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{२ब}{अ} + \frac{३ब^{२}}{अ^{२}} + \frac{४ब^{३}}{अ^{३}} + \frac{५ब^{४}}{अ^{४}} +$ इत्यादि.

साहावें, $\sqrt{अ^{२}-क्ष^{२}}$ अथवा $(अ^{२}-क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$ त्यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $अ - \frac{क्ष^{२}}{२अ} - \frac{क्ष^{४}}{८अ^{३}} - \frac{क्ष^{६}}{१६अ^{५}} - \frac{५क्ष^{८}}{१२८अ^{७}}$ इत्यादि

सातवें, $\sqrt[3]{(अ^3-ब^3)}$ अथवा $(अ^3-ब^3)^{\frac{1}{3}}$. त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ - \frac{ब^3}{३अ^2} - \frac{ब^6}{९अ^5} - \frac{५ब^9}{८१अ^8} -$ इत्यादि.

आठवें, $\sqrt[5]{(अ^5+स^5)}$ अथवा $(अ^5+स^5)^{\frac{1}{5}}$ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + \frac{स^5}{५अ^4} + \frac{२स^{10}}{२५अ^9} + \frac{६स^{15}}{१२५अ^{14}} +$ इत्यादि.

नववें, $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ त्याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $१ - \frac{ब}{अ} + \frac{ब^2}{२अ^2} - \frac{ब^3}{२अ^3}$ इत्यादि.

दाहावें, $\frac{अ^3}{अ^3+ब^3}$ त्याचें घनमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $१ - \frac{ब^3}{३अ^3} + \frac{२ब^6}{९अ^6} - \frac{१४ब^9}{८१अ^9}$ इत्यादि

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथमकृत्य*.

सांगितले श्रेणीचे पदांचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा करायाचें.

---

* एकवर्णसमीकरण आणि वर्गसमीकरण हीं शिकल्यानंतर हें शिकावें हें बरें आहे.

रीति.

१ प्रथमपद दुसऱ्यांतून वजा करावें, तसें दुसरें तिसऱ्यांतून, तिसरें चौथ्यांतून, त्याप्रमाणें पुढें ही; त्या बाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल, जीस बाक्यांची प्रथम परंपरा म्हणतात.

२ त्या नवे श्रेणींतील प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें, दुसरें तिसऱ्यांतून, त्याप्रमाणें पूर्ववत् करावें; म्हणजे त्या बाक्यांपासून एक दुसरी श्रेणी उत्पन्न होईल, तीस बाक्यांची दुसरी परंपरा म्हणतात.

३ त्याप्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढाव्या, बाकी ० होईपर्यंत, अथवा प्रयोजन आहे पर्यंत.

उदाहरणें.

पहिलें, १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि सांगितली श्रेणी.
तेव्हां ३, ४, ५, ६, ७, इत्यादि प्रथम परंपरा.
आणि १, १, १, १, इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ० , ० , ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

म्हणजे स्पष्ट आहे कीं, त्याजवर काम स्तब्ध झालें.

दुसरें, १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि सांगितली श्रे०

तेव्हां ३ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ , १६ , ३२ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ३ , ४ , ८ , १६ इत्यादि तिसरी परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ . इत्यादि चौथी परंपरा.

आणि ३ , ४ , इत्यादि पांचवी परंपरा.

आणि १ इत्यादि साहावी परंपरा.

तिसरें, १ , २ , ३ , ४ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा १,१,१,१ इत्यादि.
दुसरी परंपरा ०,०,० इत्यादि.

चौथें, १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि त्या वर्गांपासून झाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा ३ , ५ , ७ , ९ इत्यादि.
दुसरी परंपरा २ , २ , २ इत्यादि.
तिसरी परंपरा ० , ० इत्यादि.

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि त्या घनांपासून झाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या परंपरा काढ.

साहावें, १, ६, २०, ५०, १०५ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या परंपरा काढ.

दुसरें कृत्य.

सांगितले श्रेणीचें कोणतेंही पद काढायाचें.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि सांगितली श्रेणी असावी, आणि ड, ड′, ड″, ड‴ इत्यादि, हीं अक्षरचिन्हें पूर्वरीतीप्रमाणें काढिले वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें अनुक्रमें दाखवायास असावीं, आणि नं अक्षरचिन्ह इच्छिले पदाचें स्थळ दाखवायास असावें.

२ तेव्हां $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot ड' + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot \frac{न-३}{३} ड'' + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot \frac{न-३}{३} \cdot \frac{न-४}{४} \cdot ड''' +$ इत्यादि $=$ न इच्छिलें पद.

उदाहरणें.

पहिलें, २, ५, ९, १४, २० इत्यादि त्या श्रेणीचें दाहावें पद काढ.

आतां २, ५, ९, १४, २० इत्यादि सांगितली श्रेणी.
तेव्हां ३, ४, ५, ६ इत्यादि प्रथम परंपरा.
आणि १, १, १ इत्यादि दुसरी परंपरा.
आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $\text{ड}' = ३$, $\text{ड}'' = १$, $\text{ड}''' = ०$ आणि $\text{अ} = २$, $\text{न} = १०$ त्याजकरितां $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{ड}'' = २ + \frac{१०-१}{१} \cdot ३ + \frac{१०-१}{१} \cdot \frac{१०-२}{२} \times १ = २ + २७ + ३६ = ६५$ इच्छिलें दाहावें पद हें उत्तर.

दुसरें, २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि त्या श्रेणीचें विसावें पद काढ.

आतां २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि सांगितली श्रेणी.
तेव्हां ४, ६, ८, १० इत्यादि प्रथम परंपरा.
आणि २, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.
आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $\text{ड}' = ४$, $\text{ड}'' = २$, आणि $\text{अ} = २$, $\text{न} = २०$ त्याजकरितां, $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{ड}'' = २ + \frac{१९}{१} \cdot ४ + \frac{१९}{१} \cdot \frac{१८}{२} \cdot २ = २ + ७६ + ३४२ = ४२०$ इच्छिलें विसावें पद आहे हें उत्तर.

तिसरें १, ३, ६, १० इत्यादि, त्या श्रेणीचें पांचवें पद काय आहे?

उत्तर, १५

चौथें, १, ४, ८, १२, १६ इत्यादि, त्या श्रेणीचें साहावें पद काय आहे?

उत्तर ६४

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि, त्या श्रेणीचें विसावें पद काढ.

उत्तर ८०००

तिसरें कृत्य.

जर सांगितले श्रेणीचीं पदें एकमचे अंतरानें असतील तर मध्यस्थापनापासून कोणतेंही आंतलें पद काढायाचें.

रीति.

१ स्थापन करायाचें पद दाखवायाकरितां य अक्षर घ्यावें, श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदापर्यंत अंतर दाखवायास क्ष घ्यावें, आणि ड ड′ ड″ ड‴ हीं वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें दाखवायास असावीं.

२ तेव्हां $अ + क्ष ड + क्ष \cdot \frac{य-१}{२} \cdot ड'' + क्ष \cdot \frac{य-१}{२} \cdot \frac{य-२}{३}$

$\text{ड}''' + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-२}{३}\cdot\frac{\text{क्ष}-३}{४}\cdot\text{ड}'''' +$ इत्यादि $=$ य इछिलें पद होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, ३°,, ४', ३°,, ५', ३°,, ६', ३°,, ७' आणि ३°,, ८' त्यांची लागरतंम भुजज्या सांगितली आहे, त्यापासून ३°,, ६',, १५'' त्यांची लागरतंम भुजज्या काढ.

श्रेणी	लागरतंम	प्रथमपरंपरा	दुस॰प	ति॰प॰
३°,, ४'	८.७२८३३६६			
३,, ५	८.७३०६८८२	२३५१६	−१२६	
३,, ६	८.७३३०२१२	२३३९०	−१२७	१
३,, ७	८.७३५३५३५	२३२६३	−१२३	−४
३,, ८	८.७३७६६७५	२३१४०		

एथें क्ष $=$ (३°,, ६',, १५'' − ३°,, ४' $=$ २°,, १५') $= \frac{९}{४} =$ य पदाचे स्थापनाचें अंतर; अ $=$ ८.७२८३३६६, ड' $=$ २३५१६, ड'' $=$ −१२६, आणि ड''' $=$ १, आणि $\text{य} = \text{अ} + \text{क्ष}\text{ड}' + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\text{ड}'' + \text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-२}{३}\cdot\text{ड}''' = (\text{अ} + \frac{९}{४}\text{ड}' + \frac{४५}{३२}\text{ड}'' + \frac{१५}{१२८}\text{ड}''') =$ ८.७२८३३६६ + .००५२९११ − .००००१७७१८७५ + .०००००००११७ $=$ ८.७३३६०९९९२९६ इछिली लागरतंम-

भुजज्या आहे.

दुसरें, $\frac{१}{५०}$, $\frac{१}{५१}$, $\frac{१}{५२}$, $\frac{१}{५३}$, $\frac{१}{५४}$ ही सांगितली श्रेणी आहे; $\frac{१}{५२}$ आणि $\frac{१}{५३}$ त्या दोन पदांचे मधील पद काढ.

उत्तर, $\frac{१}{१०५}$

तिसरें, १° „ ० , १° „ १ . १° „ २ आणि १° „ ३ त्याची लागरतंमभुजज्या सांगितली आहे, आणि १° „ १ ४०" त्यांची लागरतंमभुजज्या इच्छिली आहे.

उत्तर, ८·२५३७५३३

चौथें कृत्य.

मध्यस्थापनानें कोणतेंही मधील पद काढायाचें, जेव्हां बरोबर अंतराचे श्रेणीच्या प्रथम बाक्या लघु आहेत.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगितली श्रेणी दाखवायास घ्यावीं, आणि न = सांगितले पदाची संख्या.

२ जेव्हां अ − नब + न · $\frac{न-१}{२}$ · क − न · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · ड + न · $\frac{न-१}{२}$ · $\frac{न-२}{३}$ · $\frac{न-३}{४}$ · ई − इत्यादि = ० त्यापासून स्थळांतर आणि पृथक्करण करून कोणतेंही पद उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, १०, ११, १२, १३, आणि १५ त्यांचीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इछिलें आहे कीं, चौदांचें वर्गमूळ काढावें.

एथें न = ५ आणि ई = इछिलें पद.

अ = √१० = ३·१६२२७७६

ब = √११ = ३·३१६६२४८

क = √१२ = ३·४६४१०१६

ड = √१३ = ३·६०५५५१२

फ = √१५ = ३·८७२९८३३

आणि त्यास्तव न = ५, आतां श्रेणी ६ पदें पावेतों वाढविली पाहिजे, त्याजकरितां अ - नब + न·$\frac{न-१}{२}$·क - न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·ड + न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·ई - न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·$\frac{न-४}{५}$·फ = ० नंतर ईची किंमत काढायाकरितां स्थलांतरानें हें उत्पन्न होतें. न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·ई = −अ + नब − न·$\frac{न-१}{२}$·क + न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·ड + न·$\frac{न-१}{२}$ $\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·$\frac{न-४}{५}$·फ. त्या समीकरणास संख्येंत हें रूप होतें. ५ई = − ३·१६२२७७६ + (५×३·३१६६२४८) − (१०×३·४६४१०१६) + (१०×३·६०५५५१२) +

४·८७२९८३३ = ५५·५११६११९३ − ३७·८०३२१३६ = १८·७०८३९५७.
आणिं ई = $\frac{१८·७०८३९५७}{५}$ = ३·७४१६६५१४ इछिलें मूळ जवळजवळ, हें उत्तर.

दुसरें, ३७, ३८, ३९; ४१, आणि ४२ त्यांचीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इछिलें आहे कीं, चाळिसांचें वर्गमूळ काढावें.

उत्तर, ६·३२४५५५३२

तिसरें, ४५, ४६, ४७, ४८, आणि ४९ त्यांचीं घनमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इछिलें आहे कीं, ५०चें घन मूळ काढावें.

उत्तर, ३·६८४०३३

पांचवें कृत्य.

सांगितले श्रेणीस फिरवायाचें.

जेव्हां कोणते एक श्रेणीचे पदांमध्यें अव्यक्त पदाचे घात आहेत. त्या अव्यक्त पदाचे किमतीचा शोध, दुसरे श्रेणींतील पदांपासून होतो. ज्या श्रेणींत सांगितले श्रेणीपदांचे बरोबरीचे घात आणि व्यक्त पदें तींच असावीं.

रीति

१ अव्यक्त पदाची किंमत दाखवायाकरितां एक श्रेणी घे, अशी कीं, तिचें रूप फिरवायानें सांगितले श्रेणीचें रूप तें होईल.

२ ही श्रेणी आणि ज्ञचे घात सांगितले श्रेणीचीं अव्यक्त पदें आणि घात त्यांचे स्थळीं ठेवावीं.

३ उत्पन्न झालेलीं तीं पदें सांगितले श्रेणींतील त्या त्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करावीं, म्हणजे घेतले घेतले चेकाप्रका-शकाची किंमत उत्पन्न होते.

उदाहरणें.

पहिलें, अक्ष + बक्ष^{२} + कक्ष^{३} + डक्ष^{४} + इत्यादि = ज्ञ, ही सांगितली श्रेणी असावी. त्यांतील क्षची किंमत ज्ञपदांत आणि व्यक्त पदांत काढावी.

आतां ज्ञ^{न} = क्ष घे, तेव्हां स्पष्ट आहे कीं, जर ज्ञ^{न} आणि त्याचे ही घात सांगितले श्रेणीमध्यें क्ष आणि त्याचे घात त्यांचे स्थळीं ठेविले तर ज्ञचे घातप्रकाशक हे होतील, न, २न, ३न, ४न, इत्यादि, आणि १, त्याजकरितां न=१, आणि त्या घातप्रकाशकांच्या बजाबाक्या त्या आहेत. ०, १, २, ३, ४, इत्यादि. म्हणजे त्या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणी

ने घातप्रकाशकांच्या ही वजावाक्या अशाच असाव्या; म्हणून घेतली श्रेणी हीच असावी, अज्ञ+बज्ञ^{२}+कज्ञ^{३}+डज्ञ^{४} + इत्यादि = क्ष, आणि जर ही श्रेणी वर्गादिकें करून वाढविली आणि क्षचे वेगळाले वर्गादिघातस्थळीं ठेविली, तर सांगितले श्रेणीस हें रूप होईल.

अअज्ञ + अबज्ञ^{२} + अकज्ञ^{३} + अडज्ञ^{४} + इत्यादि.
* + बअ^{२}ज्ञ^{२} + २बअबज्ञ^{३} + २बअकज्ञ^{४} + इत्या०
* * * + बब^{२}ज्ञ^{४} + इत्यादि.
* * + कअ^{३}ज्ञ^{३} + ३कअ^{२}बज्ञ^{४} + इत्यादि.
* * * + डअ^{४}ज्ञ^{४} + इत्यादि.
= ज्ञ

आतां त्यांत तीं पदें ज्यांत ज्ञचे सारखे घात आहेत त्यांस सम करून हीं उत्पन्न होतात.

(अअज्ञ = ज्ञ) अथवा अ = $\frac{१}{अ}$,

(अबज्ञ^{२} + बअ^{२}ज्ञ^{२} = ०) अथवा ब = $\left(-\frac{बअ^{२}}{अ}\right) = -\frac{ब}{अ^{३}}$

(अकज्ञ^{३} + २बअबज्ञ^{३} + कअ^{३}ज्ञ^{३} = ०) अथवा क = $\left(-\frac{२बअब + कअ^{३}}{अ}\right) = \frac{२ब^{२} - अक}{अ^{५}}$;

ड = $\left(-\frac{२बअक + बब^{२} + ३कअ^{२}ब + डअ^{४}}{अ}\right) = \frac{५अबक - ५ब^{३} - अ^{२}ड}{अ^{७}}$ इत्या०

आणि त्याजकरितां क्ष = (अज्ञ + बज्ञ^{२} + कज्ञ^{३} + इत्यादि) = $\frac{ज्ञ}{अ}$ −

$\frac{बज्ञ^{२}}{अ^{३}} + \frac{२ब^{२}-अक}{अ^{५}} . ज्ञ^{३} - \frac{५ब^{३}-अबक+अ^{२}ड}{अ^{७}} . ज्ञ^{४} +$ इत्यादि, ही इच्छिली श्रेणी झाली.

आणि ही उत्पन्न झालेली श्रेणी, ज्यांत सांगितले श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातांसारिखे घात आहेत, त्यांस ही साधारण सारणी कोष्टक आहे.

दुसरें, $क्ष - क्ष^{२} + क्ष^{३} - क्ष^{४} +$ इत्यादि $= ज्ञ$, ही श्रेणी फिरवायास इच्छिली आहे.

एथें $अ = १$, $ब = -१$, $क = १$, $ड = -१$, इत्यादि. त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = ज्ञ + ज्ञ^{२} + ज्ञ^{३} + ज्ञ^{४} +$ इत्यादि हें इच्छिलें उत्तर.

तिसरें, $क्ष - \frac{क्ष^{२}}{२} + \frac{क्ष^{३}}{३} - \frac{क्ष^{४}}{४} +$ इत्यादि, $= य$, ही श्रेणी फिरवायाची आहे.

एथें पूर्वप्रमाणें करून $अ = १$, $ब = -\frac{१}{२}$, $क = \frac{१}{३}$, $ड = -\frac{१}{४}$ त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = य + \frac{य^{२}}{२} + \frac{य^{३}}{६} + \frac{य^{४}}{२४} +$ इत्यादि

साहावें कृत्य.

कोणतेही अनंतश्रेणीचें न पदापर्यंत सर्वधन काढायाचें रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगितली श्रेणी दाखवायास घे, स = न पदपर्यंत सर्वधन, आणि ड', ड'', ड''', ड'''' इत्यादि चिन्हें प्रथम कृत्याप्रमाणें वाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा दाखवायास घे.

२ तेव्हां $\text{नअ} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\text{ड}'' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\cdot\text{ड}''' + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\cdot\frac{\text{न}-४}{५}\cdot\text{ड}'''' + \text{इत्यादि} = \text{स}$, हें न पदपर्यंत श्रेणीचें इच्छिलें सर्वधन आहे.

प्रथम प्रकार १, २, ३, ४, ५ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, २, ३, ४, ५ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

१, १, १, १ . इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें अ = १, ड' = १, ड'' = ०, तेव्हां $\text{नअ} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}' = \frac{२\text{नअ} + \overline{\text{न}^२ - \text{न}}\cdot\text{ड}'}{२} = \left(\frac{२\text{न} + \text{न}^२ - \text{न}}{२}\right) = \frac{\text{न}\cdot\overline{\text{न}+१}}{२} = \text{स}$ इच्छिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें २० पदेंपर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे. एथें न = २०, आणि $\text{स} = \frac{\text{न}\cdot\overline{\text{न}+१}}{२} = \frac{२०\times२१}{२} = २१०$ सर्वधन, हें उत्तर.

दुसरें, पूर्वश्रेणीचें १००० पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

उत्तर, ५००५००

तिसरें, पूर्वश्रेणीचें १२३४५ पदेंपर्यंत सर्वधन काढ.

दुसरा प्रकार, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

२, २, २, २ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें अ=१, $\text{ड}=२$, $\ddot{\text{ड}}=०$, तेव्हां $\text{न}\text{अ}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{ड}=(\text{न}\text{अ}+\frac{\text{न}^{२}-\text{न}}{२}\cdot\text{ड}=$ (त्याजकरितां अ=१ आणि ड=२) $(\text{न}+\text{न}^{२}-\text{न})=\text{न}^{२}=\text{स}$ इलिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें १० पदेंपर्यंत सर्वधन काढ.

एथें न=१०, आणि $\text{स}=\text{न}^{२}=१००$ सर्वधन हें उत्तर.

तिसरा प्रकार, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि वर्गाचे श्रेणीचें न पदांपर्यंत सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

३, ५, ७, ९ इत्यादि प्रथम परंपरा.

२, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

एथें $अ = १$, $ड' = ३$, $ड'' = २$, $ड''' = ०$, तेव्हां $न अ + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} \cdot ड'' = \left(न + ३ न \cdot \frac{न-१}{२} + २ न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} = \frac{३न^२ - न}{२} + \frac{न^३ - ३न^२ + २न}{३}\right) = \frac{न \cdot (न+१)\ (२न+१)}{६} = स$ इच्छिलें सर्वधन.

उदाहरणें

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें ३० पदेंपर्यंत सर्वधन काढ.

एथें $न = ३०$ त्याजकरितां $\frac{न(न+१)(२न+१)}{६} = \frac{३० \times ३१ \times ६१}{६} = ९४५५$ सर्वधन हें उत्तर.

कोष्टक पृष्ठ ११९ पाहा.

सातवें कृत्य.

वजाबाकीचे रीतीनें श्रेणीचें सर्वधन काढायाचें.

ही रीति दोन अथवा तीन सोपे उदाहरणापासून प्रकट होईल.

प्रथमउदाहरण.

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स ही सांगितली श्रेणी, हिचें सर्वधन काढ.

तर $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+$ इत्यादि अनंत $=$ स-१,

वजाबाकीनें $\frac{१}{१\cdot२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{४\cdot५}+$ इत्यादि अनंत $=१$ सर्वधन हें उत्तर.

दुसरें.

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स, ही सांगितली श्रेणी हिचें सर्वधन काढ.

तेव्हां $\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स$-\frac{३}{२}$

वजाबाकीनें $\frac{२}{१\cdot३}+\frac{२}{२\cdot४}+\frac{२}{३\cdot५}+\frac{२}{४\cdot६}+$ इत्यादि $=\frac{३}{२}$

अथवा

२ त्यांनीं भागून $\frac{१}{१\cdot३}+\frac{१}{२\cdot४}+\frac{१}{३\cdot५}+\frac{१}{४\cdot६}+$ इत्यादि $=\frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर.

तिसरें.

$\frac{१}{१\cdot२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स ही सांगितली श्रेणी, हिचें सर्वधन काढ.

तेव्हां $\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{४\cdot५}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स$-\frac{१}{२}$

वजाबाकीनें $\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+$ इत्यादि $=\frac{1}{2}$

अथवा,

२ त्यानीं भागून $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+$ इत्यादि $=\frac{1}{4}$

चवथें.

$\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{4\cdot6\cdot8}+\frac{1}{6\cdot8\cdot10}+$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, त्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

आतां प्रत्येक छेदांचें शेवटील गुणक सोड, आणि.

$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+$ इत्यादि $=$ स घे.

तर $\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\frac{1}{8\cdot10}+$ इत्यादि $=$ स $-\frac{1}{8}$

वजाबाकीनें $\frac{4}{2\cdot4\cdot6}+\frac{4}{4\cdot6\cdot8}+\frac{4}{6\cdot8\cdot10}+$ इत्यादि $=\frac{1}{8}$

अथवा

४ त्यांनीं भागून $\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{4\cdot6\cdot8}+\frac{1}{6\cdot8\cdot10}+$ इत्यादि $=\frac{1}{32}$ सर्वधन हें उत्तरं.

पांचवें.

$\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{1}{6\cdot8\cdot10\cdot12}+\frac{1}{8\cdot10\cdot12\cdot14}+$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर $\frac{1}{288}$

साहावें.

$\frac{१}{२·५·८·११} + \frac{१}{५·८·११·१४} + \frac{१}{८·११·१४·१७} + \frac{१}{११·१४·१७·२०} +$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{१}{७२०}$.

आठवें कृत्य.

अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढण्याचें, ती अनंतश्रेणी कोण तेंही अपूर्णपद वाढविल्यापासून उत्पन्न झाली असें कल्पून.

रीति.

सांगितली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी, ज्या अपूर्णपदाचे छेदांनीं ती श्रेणी गुणिली तर गुणाकार मान होईल: हा गुणाकार घेतलें अपूर्णपदाचे अंशाबरोबर असून त्याची किंमत निघेल.

उदाहरणें.

पहिलें, $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि अनंत पदें आहेत, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी $= \frac{क्ष}{१-क्ष}$ घे.

तेव्हां $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि.

गुणिली $\underline{१ - क्ष}$

$क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि

$- क्ष^{२} - क्ष^{३} -$ इत्यादि

$ह = क्ष$ ※ ※

त्याजकरितां $क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} +$ इत्यादि $= \frac{क्ष}{१-क्ष}$

असें जर $क्ष = \frac{१}{२}$ तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} +$ इत्यादि $= \frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = १$

जर $क्ष = \frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} +$ इत्यादि $= \frac{१}{३} \div \frac{२}{३} = \frac{१}{२}$

सर्वधन हें उत्तर.

दुसरें, $क्ष + २ क्ष^{२} + ३ क्ष^{३} +$ इत्यादि अनंत पदें, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी $= \frac{ह}{(१-क्ष)^{२}} = \frac{ह}{१-२क्ष+क्ष^{२}}$

तेव्हां $क्ष + २ क्ष^{२} + ३ क्ष^{३} +$ इत्यादि

गुणिली $\underline{१ - २क्ष + क्ष^{२}}$

$क्ष + २ क्ष^{२} + ३ क्ष^{३} +$ इत्यादि.

$- २ क्ष^{२} - ४ क्ष^{३} -$ इत्यादि.

$+ क्ष^{३} +$ इत्यादि.

$ह = क्ष$ ※ ※

त्याजकरितां $क्ष + २ क्ष^{२} + ३ क्ष^{३} +$ इत्यादि $= \frac{क्ष}{(१-क्ष)^{२}}$

जर $क्ष = \frac{१}{२}$, तर, $\frac{१}{२} + \frac{२}{४} + \frac{३}{८} + \frac{४}{१६} +$ इत्यादि $= \frac{१}{२} \div \frac{१}{४} = २$

जर क्ष $= \frac{१}{३}$, तर, $\frac{१}{३} + \frac{२}{९} + \frac{३}{२७} + \frac{४}{८१} +$ इत्या॰ $= \frac{१}{३} \div \frac{४}{९} = \frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर.

आणि त्या प्रमाणें पुढें ही आणखी प्रकार.

तिसरें, क्ष $+ ४$ क्ष^{२} $+ ९$ क्ष^{३} $+ १६$ क्ष^{४} $+$ इत्यादि, त्या अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{क्ष(१+क्ष)}{(१-क्ष)^{३}}$

समीकरण.

समीकरण म्हणजे बीजगणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्तपदांच्या किमती त्या पदांच्या दुसऱ्या व्यक्तपदांशीं जो संबंध आहे त्याचे साहाय्यानें काढायाच्या वेगळाल्या रीति दाखवितो.

कितीएक बीजगणितसंबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; त्या बरोबर केले उद्देशकांस समीकरण म्हणतात. नंतर त्याचे रीतीप्रमाणें गणित करीत चलावें, अव्यक्तपद त्या समीकरणाचे बाजूस एकाकी राहीपर्यंत; म्हणजे दुसरे बाजूंतील सांगितले व्यक्तपदांचे बरोबर

होईल.

ज्या पदांपासून समीकरण समुत्पन्न झालें त्या पदांस समीकरणाचीं पदें म्हणतात, आणि बरोबरीच्या = ह्या चिन्हाचे दोहोंकडे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू म्हणतात.

जसें जर क्ष = अ + ब ह्यांत क्ष, अ, आणि ब हीं तीन पदें आहेत; आणि त्या उद्देशकाचा अर्थ हा कीं, कोणतेंही पद क्ष समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू अ आणि ब हीं दोन पदें आहेत त्यांचे बेरीजेबरोबर आहे.

एकवर्णसमीकरण म्हणजे तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

जसें क्ष + अ = २ ब अथवा अक्ष = बक अथवा २क्ष + ३$अ^{२}$ = ५ $ब^{२}$ ह्यांत क्ष अव्यक्तपद दाखवितो, आणि दुसरीं अक्षरचिन्हें आणि अंक व्यक्तपदें दाखवितात.

अनेकवर्ण समीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

जसें, $क्ष^{२}$ + अक्ष = ब अथवा $क्ष^{३}$ − ४ $क्ष^{२}$ + ३ क्ष = २५.

त्या समीकरणाच्या जाति अथवा नांवें त्यांतील

अव्यक्तपदांचे सर्वांहून मोठे घात येतात त्यांवरून तशीं तशीं होतात. जशीं, वर्गसमीकरण, घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण, इत्यादि.

वर्गसमीकरण तें होय, ज्यांत अव्यक्तपद दोन घातांचें आहे, अथवा दुसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें. $क्ष^2 = २$ अथवा $क्ष^2 + अक्ष = ब$ अथवा $७क्ष^2 + १०क्ष = १००$

घनसमीकरण तें होय, ज्यांत अव्यक्तपद तीन घातांचें आहे, अथवा तिसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, $क्ष^3 = २७$ अथवा $२क्ष^3 - ३क्ष = ३५$ अथवा $क्ष^3 - अक्ष^2 + बक्ष = क$.

चतुर्घातसमीकरण तें होय, ज्यांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे, अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, $क्ष^4 = २५$ अथवा $५क्ष^4 - ४क्ष = ६$ अथवा $क्ष^4 - अक्ष^3 + बक्ष^2 - कक्ष = ड$, इत्यादि समीकरणांस पंचघात, षट्घात, आणि त्यांहून अधिक महत्वजातीचीं उपपदें लागतात; त्या सर्वांस अव्यक्तपदांत सर्वांहून मोठा घात येतो तशीं नांवें होतात.

समीकरणाचें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अ-

व्यक्तपदाचे स्थानीं ठेविलें असतां समीकरणाच्या दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें, परंतु अनेक वर्णसमीकरणास तितकीं मुळें होतात; त्याचे अव्यक्तपदांत जितके घात आहेत, अथवा त्यांतील पदांत सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक आहे, त्याचे संख्येइतकीं मुळें होतात, म्हणून तें दाखवितो.

जसें, $क्ष^2+2क्ष=15$ त्या वर्गसमीकरणांत मूळ किंवा क्ष अव्यक्तपदाची किंमत +३ आहे, किंवा −५. आणि $क्ष^3-9क्ष^2+26क्ष=24$ त्या घनसमीकरणाचीं मुळें २, ३ आणि ४ हीं आहेत. म्हणजे त्या तीहींतून कोणतेंही एक क्षचे स्थळीं ठेविलें असतां त्या समीकरणाच्या दोनही बाजू उडतील, अथवा बराबर होतील.

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति, ज्यांत एकच अव्यक्तपद आहे.

एकवर्णसमीकरण तशीं सर्व समीकरणें त्यांची कृति ही आहे कीं, सर्व समीकरणांच्या उदाहरणांत अव्यक्तपदाची किंमत काढितेसमयीं तें कोणतेही दुसरे व्यक्तपदाशीं संबद्ध असेल, त्यास तेथून सोडवून एक बाजूस लि-

ठावें. आणि बाकी व्यक्त पदें दुसरे बाजूस लिहावीं. हेंच करायाकरितां वेगळालीं प्रत्यक्षप्रमाणें आणि कृति घेतली पाहिजे, म्हणून त्या दोहोंतील सर्वांहून उपयोगी जीं आहेत, तीं सांगतों.*

प्रथमप्रकार.

समीकरणाचे कोणतेही पदाचें स्थानांतर त्या पदाचें चिन्ह बदल करून एक बाजूंतून काढून दुसरे बाजूंत नेतां येईल. असें केलें असतां ही दोन्ही बाजू किमतींत बराबरच राहातील.

---

* हें काम करायाची कृति या पुढील प्रत्यक्षप्रमाणांपासून प्रकट होते.

१ दोन समपदांत एकच पद प्रत्येकांत मिळविलें अथवा वजा केलें तर दोन बेरजा अथवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र०प्र०) बरोबर होतील म्हणूनच एक बाजूचें पद दुसरे बाजूस आणिलें तर त्याचें धन ऋण चिन्ह असेल तें बदल होतें हें ही तसेंच आहे.

२ कोणतींही दोन समपदें एकच पदानें प्रत्येकीं गुणिलीं अथवा भागिलीं तर त्याचे दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (१० आणि ११ सि०प्र०) बराबर होतील.

३ कोणतींही एकाकी पदें किंवा संयुक्तपदें परस्पर बराबर असतील तर त्या पदांचे कोणतेही सारखे घात अथवा मूळेंही (१४ सि०प्र० बराबर होतील.

आणि पुढील साहा प्रकारांचे उदाहरणांतील वेगळाल्या कृतींवरून हीं सर्व प्रत्यक्षें उघड होतील.

जसें. जर क्ष + ३ = ७ तर क्ष = ७ - ३ म्हणजे क्ष = ४

आणि जर क्ष - ४ + ६ = ८ तर क्ष = ८ + ४ - ६ म्हणजे क्ष = ६

आणि जर क्ष - अ + ब = क - ड तर क्ष = क - ड + अ - ब.

आणि जर ४ क्ष - ८ = ३ क्ष + २० तर ४ क्ष - ३ क्ष = २० + ८ म्हणजे क्ष = २८

त्या रीतीपासून हें निघतें कीं, जर दोनही बाजूंस पदें एकरूप आणि एकच चिन्हानें युक्त आहेत, तर तीं त्या दोनही बाजूंतून टाकितां येतील, आणि कोणत्याही समीकरणाचे सर्व पदांचीं चिन्हें बदल करितां येतील. किंमत आहे तीच राहील.

जसें जर क्ष + ५ = ७ + ५ तर रद्द करण्याचे रीतीनें क्ष = ७

आणि जर अ - क्ष = ब - क तर क्ष - अ = क - ब म्हणजे क्ष = अ + क - ब.

दुसरा प्रकार.

कोणतेही समीकरणांत जर अव्यक्त पद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह त्या गुणकानें गुणायाचें जोडिलें आहे, तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदें भागून तो गुणक त्या अव्यक्त पदापासून काढून उडवितां येईल. आणि जर अव्यक्त

पद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह त्या भाजकानें भागायाचें जोडिलें आहे, तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदें गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल.

जसें, जर $\text{अक्ष} = \text{३अब} - \text{क}$ तर $\text{क्ष} = \text{३ब} - \frac{\text{क}}{\text{अ}}$

आणि जर $\text{२क्ष} + \text{४} = \text{१६}$ तर $\text{क्ष} + \text{२} = \text{८}$ म्हणजे $\text{क्ष} = \text{८} - \text{२} = \text{६}$.

आणि जर $\frac{\text{क्ष}}{\text{२}} = \text{५} + \text{३}$ तर $\text{क्ष} = \text{१०} + \text{६} = \text{१६}$.

आणि जर $\frac{\text{२क्ष}}{\text{३}} - \text{२} = \text{४}$, तर $\text{२क्ष} - \text{६} = \text{१२}$, तर भागाकारानें $\text{क्ष} - \text{३} = \text{६}$ अथवा $\text{क्ष} = \text{६} + \text{३} = \text{९}$

तिसरा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत कांहीं अपूर्णबीज पदें असतील, तर त्या अपूर्णबीज पदांचे छेद उडवितां येतील. जे प्रतिपदाचे छेदांनीं अनुक्रमें त्या त्या पदावांचून राहिलीं सर्व पदें गुणिल्यापासून, अथवा अपूर्णबीज पदांचे सर्व छेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्व पदें गुणिल्यापासून, किंवा दोनही बाजूंतील सर्व पदें सर्व छेदांचे लघुतमसाधारण*

---

* साधारणगुणाकार म्हणजे एक संख्या आहे, ज्यांत दुसरी कोणती

गुणाकाराने गुणिल्यापासून.

जसें जर $\frac{क्ष}{३} + \frac{क्ष}{४} = ५$ तर प्रथम पदाचे छेद ३ त्यांनीं री

ही संख्या कितीएक वेळां बरोबर जाते.

जसें, ६ ही संख्या २ या संख्येचा साधारण गुणाकार आहे. कारण, ६ यांतून २ बरोबर ३ वेळां जातात.

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३. या प्रत्येक संख्यांचा साधारण गुणाकार आहे, कारण, १२ यांत प्रथमसंख्या ६ बरोबर २ वेळां जातात, तसें दुसरी संख्या ४ बराबर ३ तीन वेळां जातात, आणि तिसरी संख्या ३ बराबर ४ वेळां जातात.

कितीएक संख्या पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार काढायाची रीति.

कितीएक संख्या पदें आहेत त्यांत बहुत पदें कोणत्या संख्येनें बराबर भागिलीं जातील, तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजकस्थळीं लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खालीं लिहावे; आणि जीं नभागत तीं तशींच त्यांचे खालीं लिहावीं. नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेंच दुसरा भाजक कल्पून त्या दुसरे ओळींत पूर्ववत् करावें. याप्रमाणें करितां कदाचित् शेवटास दोन पदें पर्यंत नच भागिलीं जात, तर ते सर्वभाजक आणि तीं राहिलीं पदें परस्पर गुणून तो गुणाकार साधारण लघुतम गुणाकार झाला. असें समजावें.

उदाहरण.

७, ३५, ४२, २०, २४ या संख्या पदांचा साधारण लघुतम गुणाकार कर.

÷ ७	७, ३५, ४२, २०, २४
÷ ५	१, ५, ६, २०, २४
÷ ६	१, १, ६, ४, २४
÷ ४	१, १, १, ४, ४
	१, १, १, १, १

तर ७×५×६×४=८४० हा त्या वरचे पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार होय.

त्याप्रमाणें गुणिल्यानें क्ष+$\frac{३क्ष}{४}$=१५, पुनः राहिले पदाचे छेद ४ त्यांनीं गुणिल्यानें ४ क्ष+३ क्ष=६०, नंतर मिळवणीनें ७ क्ष=६०. आतां भागाकारानें क्ष=$\frac{६०}{७}$=८$\frac{४}{७}$

आणि जर $\frac{क्ष}{४}$+$\frac{क्ष}{६}$ = १० तर ४×६=२४ म्हणजे त्यासर्व छेदांचे गुणाकारानें समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणिल्यानें $\frac{२४क्ष}{४}$+$\frac{२४क्ष}{६}$ = २४०, अथवां ६ क्ष+४ क्ष = २४०, नंतर मिळवणीनें १० क्ष=२४०. आतां भागाकारानें क्ष=$\frac{२४०}{१०}$=२४.

आणि जर $\frac{क्ष}{४}$+$\frac{क्ष}{६}$=१० तर ४ आणि ६ त्यांचा लघुतम साधारणगुणाकार १२ त्यांनीं समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणिल्यानें $\frac{१२क्ष}{४}$+$\frac{१२क्ष}{६}$=१२०, अथवा ३ क्ष+२ क्ष=१२०, नंतर मिळवणीनें ५ क्ष=१२०. आतां भागाकारानें क्ष=$\frac{१२०}{५}$=२४

त्या रीतीवरून कळतें कीं, जर एकच संख्या अथवा अक्षरचिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाजक अशा रीतीनें दुसरे पदाशीं संयुक्त होऊन असेल, तर ती साधारणसंख्या अथवा तें अक्षरचिन्ह त्या दोनही बाजूंतून उडवितां येईल, परंतु किंमत आहे तीच आहे.

जसें, जर अक्ष=अब+अक, तर रद्द केल्यानें क्ष=ब+क

आणि जर $\frac{क्ष}{अ}$+$\frac{ब}{अ}$=$\frac{क}{अ}$, तर रद्द केल्यानें क्ष+ब=

क, म्हणजे क्ष=क-ब

चवथा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणात अव्यक्त पद करणीरूप आहे तर (१ प्रकाराप्र०) सर्व पदांस स्थळांतर करावें, असें कीं अव्यक्त पद समीकरणाचे एक बाजूस एकलें येईल, आणि राहिलीं सर्व पदें दुसरे बाजूस येतील. नंतर समीकरणाच्या दोनही बाजू करणीच्या घातापर्यंत वाढवाव्या, म्हणजे उद्देशक समीकरणखंडपदापासून मुक्त होईल.

जसें जर $\sqrt{\text{क्ष}}-\text{२}=\text{३}$ तर स्थळांतरानें $\sqrt{\text{क्ष}}=\text{३}+\text{२}=\text{५}$ नंतर वर्ग केल्यानें $\text{क्ष}=\text{२५}$

आणि जर $\sqrt{\text{३क्ष}+\text{४}}=\text{५}$ तर वर्ग केल्यानें $\text{३क्ष}+\text{४}=\text{२५}$ नंतर स्थळांतरानें $\text{३क्ष}=\text{२५}-\text{४}=\text{२१}$ आणि भागाकारानें $\text{क्ष}=\frac{\text{२१}}{\text{३}}=\text{७}$

आणि जर $\sqrt[3]{\text{२क्ष}+\text{३}}+\text{४}=\text{८}$, तर स्थळांतरानें $\sqrt[3]{\text{२क्ष}+\text{३}}=\text{८}-\text{४}=\text{४}$, नंतर घन केल्यानें $\text{२क्ष}+\text{३}=\text{४}^{\text{३}}=\text{६४}$, पुनः स्थळांतरानें $\text{२क्ष}=\text{६४}-\text{३}=\text{६१}$. आतां भागाकारानें $\text{क्ष}=\frac{\text{६१}}{\text{२}}=\text{३०}\frac{\text{१}}{\text{२}}$

पांचवाप्रकार.

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणताही एक पूर्णघात असेल, तर त्या समीकरणाचा त्या रीतीनें संक्षेप केला जातो, जे समीकरणाचें दोनही बाजूंचे पदांचें त्या पूर्ण घाताचें मूळ काढावें.

जसें, जर $क्ष^{२} = ८१$ तर $क्ष = \sqrt{८१} = ९$

आणि जर $क्ष^{३} = २७$ तर $क्ष = \sqrt[३]{२७} = ३$

आणि जर $३क्ष^{२} - ९ = २४$ तर स्थळांतरानें $३क्ष^{२} = २४ + ९ = ३३$ नंतर भागाकारानें $क्ष^{२} = \frac{३३}{३} = ११$ नंतर वर्गमूळ काढिल्यानें $क्ष = \sqrt{११}$.

आणि जर $क्ष^{२} + ६क्ष + ९ = २७$ तर विचारें पाहातां करणीचे डावे बाजूंत एक पूर्ण घात म्हणजे वर्ग आहे, तेव्हां वर्गमूळ काढिल्यानें $क्ष + ३ = \sqrt{२७} = \sqrt{९ \times ३} = ३\sqrt{३}$ तर स्थळांतरानें $क्ष = ३\sqrt{३} - ३$.

साहावाप्रकार.

कोणतेही प्रमाणास त्याचे दोन शेवटपदांचा गुणाकार दोनमध्यपदांचे गुणाकाराबरावर आहे, तो केल्यानें समीकरणाचें रूप देतां येईल.

जसें जर ३क्ष : १६ : : ५ : ६ तर ३क्ष × ६ = १६ × ५ अथवा १८क्ष = ८० तर भागाकारानें क्ष = $\frac{८०}{१८}$ = $\frac{४०}{९}$ = ४ $\frac{४}{९}$

आणि जर $\frac{२क्ष}{३}$: अ : : ब : क तर $\frac{२क्ष}{३}$ × क = अ × ब अथवा $\frac{२क्षक}{३}$ = अब, गुणाकारानें २क्षक = ३अब, भागाकारानें क्ष = $\frac{३अब}{२क}$

आणि जर १२ − क्ष : $\frac{क्ष}{२}$: : ४ : १ तर १२ − क्ष = २क्ष, तर स्थळांतरानें १२ = २क्ष + क्ष = ३क्ष, भागाकारानें क्ष = $\frac{१२}{३}$ = ४

पूर्वप्रकारांचीं वेगळालीं उदाहरणें.

पहिलें, ७क्ष − १८ = ४क्ष + ६ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

आतां ७क्ष − १८ = ४क्ष + ६.

स्थळांतरानें, ७क्ष − ४क्ष = ६ + १८

तर · · · ३क्ष = २४

भागाकारानें · · · क्ष = $\frac{२४}{३}$ = ८ हें उत्तर.

दुसरें, ३७ − ४क्ष − १२ = ९२ − १०क्ष त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

आतां २० – ४ क्ष – १२ = ९२ – १० क्ष

स्थळांतरानें, · · · १० क्ष – ४ क्ष = ९२ – २० + १२

तर, · · · · · · · ६ क्ष = ८४

भागाकारानें, · · · · · · क्ष = $\frac{\text{८४}}{\text{६}}$ = १४ हें उत्तर.

तिसरें, ४ अक्ष – ५ ब = ३ डक्ष + २क त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय?

आतां ४ अक्ष – ५ ब = ३ डक्ष + २ क

स्थळांतरानें, ४ अक्ष – ३ डक्ष = ५ ब + २ क

तर, ४ अ – ३ ड त्यांनीं भागून क्ष = $\frac{\text{५ब + २क}}{\text{४अ – ३ड}}$ हें उत्तर

चौथें, ५ क्ष^{२} – १२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^{२} त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे. त्याची किंमत काय?

आतां, ५ क्ष^{२} – १२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^{२} त्यांत सर्व पदांचा साधारण गुणक क्ष

त्यानें ती भागून · · ५ क्ष – १२ = ९ + २ क्ष

स्थळांतरानें · · ५ क्ष – २ क्ष = १२ + ९

तर · · · · ३ क्ष = २१

भागाकारानें · · · · क्ष = $\frac{\text{२१}}{\text{३}}$ = ७ हें उत्तर.

पांचवें, ९ अक्ष^{२} – १५ अबक्ष^{२} = ६ अक्ष^{२} + १२ अक्ष^{२} त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत

काय ?

आतां, ९ अक्ष^{2} - १५ अबक्ष = ६ अक्ष^{2} + १२ अक्ष

त्यांत सर्व पदांचा साधारण गुणक ३ अक्ष

त्यानें ती भागिल्यानें, . . ३ क्ष - ५ ब = २ क्ष + ४

स्थलांतरानें, . . ३ क्ष - २ क्ष = ५ ब + ४

तर, . . . क्ष = ५ ब + ४ हें उत्तर.

साहावें, $\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$आतां\ \frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$$

प्रथमच्छेद ३ त्यांनीं गुणून $क्ष - \frac{३क्ष}{४} + \frac{३क्ष}{५} = ६$

दुसरे छेद ४ त्यांनीं गुणून $४ क्ष - ३ क्ष + \frac{१२क्ष}{५} = २४$

राहिले छेद ५ त्यांनीं गुणून २० क्ष - १५ क्ष + १२ क्ष = १२०

तर १७ क्ष = १२०

भागाकारानें, $क्ष = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७}$ हें उत्तर.

दुसरे रीतीनें,

$$\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$$

३ · ४ · ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून.

६० त्यांनीं सर्व पदें गुणिल्यानें $\frac{६०क्ष}{३} - \frac{६०क्ष}{४} + \frac{६०क्ष}{५} = १२०$

तर २० क्ष - १५ क्ष + १२ क्ष = १२०

तर · · · · $१७\text{क्ष} = १२०$

भागाकारानें · · · · · · $\text{क्ष} = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७}$

हें पूर्ववत् उत्तर.

सातवें, $\frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$ ह्या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां $\frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{२} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$

प्रथम छेद ३ ह्यांनीं गुणिल्यानें, $\text{क्ष} - ५ + \frac{३\text{क्ष}}{२} = ३६ - \text{क्ष} + १०$

दुसरे छेद २ ह्यांनीं गुणिल्यानें, $२\text{क्ष} - १० + ३\text{क्ष} = ७२ - २\text{क्ष} + २०$

स्थलांतरानें, · · · · · $२\text{क्ष} + ३\text{क्ष} + २\text{क्ष} = ७२ + २० + १०$

तर, · · · · · $७\text{क्ष} = १०२$

भागाकारानें, · · · · · $\text{क्ष} = \frac{१०२}{७} = १४\frac{४}{७}$ हें उत्तर.

आठवें, $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} + ७ = १०$ ह्या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां, $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} + ७ = १०$

स्थलांतरानें, · $\sqrt{\frac{३\text{क्ष}}{४}} = १० - ७ = ३$

वर्ग केल्यानें, · · $\frac{३\text{क्ष}}{४} = ३^२ = ९$

गुणाकारानें, · · · · $३\text{क्ष} = ३६$

भागाकारानें, · · · · · $\text{क्ष} = \frac{३६}{३} = १२$ हें उत्तर.

नववें, $२क्ष + २\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ^२ + क्ष^२}}$ ह्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

आतां, . . . $२क्ष + २\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ^२ + क्ष^२}}$

आतां, $\sqrt{अ^२ + क्ष^२}$ ह्यानें गुणिल्यानें $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} + २(अ^२ + क्ष^२) = ५अ^२$

तर, ... $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} + २अ^२ + २क्ष^२ = ५अ^२$

स्थळांतरानें, ... $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = ३अ^२ - २क्ष^२$

वर्ग केल्यानें, . . . $४क्ष^२ \times \overline{अ^२ + क्ष^२} = \overline{३अ^२ - २क्ष^२}^२$

तर, ... $४अ^२क्ष^२ + ४क्ष^४ = ९अ^४ - १२अ^२क्ष^२ + ४क्ष^४$

दोनही बाजूंनीं $४क्ष^४$ हीं दोन पदें

टाकिल्यानें, ... $४अ^२क्ष^२ = ९अ^४ - १२अ^२क्ष^२$

स्थळांतरानें, ... $४अ^२क्ष^२ + १२अ^२क्ष^२ = ९अ^४$

तर, ... $१६अ^२क्ष^२ = ९अ^४$

भागाकारानें, ... $क्ष^२ = \frac{९अ^४}{१६अ^२} = \frac{९अ^२}{१६}$

वर्गमूळ केल्यानें . . . . . . $क्ष = \sqrt{\frac{९अ^२}{१६}} = \frac{३}{४}अ$ हें उत्तर

दाहावें, $२क्ष - ५ + १६ = २१$ ह्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = ५$

अकरावें, $६क्ष - १५ = क्ष + ६$ ह्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= ४\frac{१}{५}$

बारावें, $८ - ३ क्ष + १२ = ३० - ५ क्ष + ४$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= ७$

तेरावें, $क्ष + \frac{१}{३} क्ष - \frac{१}{४} क्ष = १३$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= १२$

चौदावें, $३ क्ष + \frac{१}{२} क्ष + २ = ५ क्ष - ४$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= ४$

पंधरावें, $४ अक्ष + \frac{१}{३} अ - २ = अक्ष - बक्ष$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= \frac{६ - अ}{९अ + ३ब}$

सोळावें, $\frac{१}{५} क्ष - \frac{१}{४} क्ष + \frac{१}{६} क्ष = \frac{१}{२}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= \frac{३०}{७}$

सत्रावें, $\sqrt{४ + क्ष} = ४ - \sqrt{क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष $= २\frac{१}{४}$

अठरावें, $४अ + क्ष = \frac{क्ष^२}{४अ + क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अंव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर $क्ष = -२अ$

एकुणिसावें, $\sqrt{४अ^२ + क्ष^२} = \sqrt[४]{४ब^४ + क्ष^४}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{ब^४ - ४अ^४}{२अ^२}$

विसावें, $\sqrt{क्ष} + \sqrt{२अ + क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ + क्ष}}$ त्या समीकरणांत क्षअव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{२}{३}अ$

एकविसावें, $\frac{अ}{१ + २क्ष} + \frac{अ}{१ - २क्ष} = २ब$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{१}{२}\sqrt{\frac{ब - अ}{ब}}$

बेविसावें, $अ + क्ष = \sqrt{अ^२ + क्ष\sqrt{४ब^२ + क्ष^२}}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, $क्ष = \frac{ब^२}{अ} - अ$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाची रीति.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदें आहेत तीं वेगळाले दोन

समीकरणांत येतात, तेव्हां पुढील तीन रीतींतून, एके रीतीनें त्या दोन समीकरणांस एकत्र करून त्यांचें एंकच समीकरण करितां येईल.

प्रथमरीति

प्रत्येकसमीकरणांत पूर्वी सांगितले रीतीकरून एक अव्यक्तपदाची किंमत राहिले दुसरे पदांचे किमतीकरून काढावी. नंतर त्या दोन बराबर किमतीपासून एक नवें समीकरण होईल, ज्यांत अव्यक्तपद एकच येईल, त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणें निघेल.*

टीप. यांत उघड दिसतें कीं, ज्या अव्यक्तपदाची किंमत काढायास सुगम आहे, त्यापासून सांगितले समीकरणांत किंमत काढायास आरंभ करावा.

उदाहरणें.

पहिलें, { २क्ष+३य=१७ ; ५क्ष−२य=१४ } त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

---

* यारीतीस तें प्रत्यक्ष आश्रय होय, ज्या वस्तू एकवस्तूशीं बराबर त्या सर्व परस्पराबराबर, तसें पुढील दोन रीतींसही आश्रय उघड मकटार्थन आहेत.

प्रथम समीकरणांत २क्ष + ३य = १७, क्षची किंमत काढा-याकरितां ३य त्यांस स्थलांतर करून २ त्यांनीं भागिल्यानें

$क्ष = \frac{१७ - ३य}{२}$

दुसरे समीकरणांत ५क्ष - २य = १४, क्षची किंमत काढाया करितां २य त्यांस स्थलांतर करून ५ त्यांनीं भागिल्यानें

$क्ष = \frac{१४ + २य}{५}$

नंतर, क्षच्या दोन किंमती परस्पर बराबर करून

$$\frac{१७ - ३य}{२} = \frac{१४ + २य}{५}$$

आतां पूर्वरीतीनें २ आणि ५ त्या छेदांनीं गुणिल्यानें

$$८५ - १५य = २८ + ४य$$

स्थलांतरानें, ... $८५ - २८ = ४य + १५य$

तर, ... $१९य = ५७$

भागाकारानें, ... $य = \frac{५७}{१९} = ३$

नंतर यची किंमत पूर्व कोणतेही समीकरणांत उघड मांडिल्यानें, प्रथमांत $क्ष = \frac{१७ - ९}{२} = ४$ आणि दुसऱ्यांत $क्ष = \frac{१४ + ६}{५} = ४$ हें उत्तर.

दुसरें, $\left\{\begin{matrix} क्ष + य = अ \\ क्ष - य = ब \end{matrix}\right\}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $क्ष=अ-य$

आणि दुसऱ्यांतील, . $क्ष=ब+य$

त्याजकरितां, . . . $अ-य=ब+य$

नंतर स्थलांतरानें, $२य=अ-ब$

भागाकारानें, $य=\frac{अ-ब}{२}$

प्रथमांत यची ही किंमत उघड लिहिल्यानें $\left\{ क्ष=अ-\frac{अ-ब}{२}=\frac{अ+ब}{२} \right\}$

दुसऱ्यांत यची ही किंमत उघड लिहिल्यानें $\left\{ क्ष=ब+\frac{अ-ब}{२}=\frac{अ+ब}{२} \right\}$

हीं दोनही बरोबर हें उत्तर.

तिसरें, $\left\{ \begin{matrix} \frac{१}{२}क्ष+\frac{१}{३}य=७ \\ \frac{१}{३}क्ष+\frac{१}{२}य=८ \end{matrix} \right\}$ ह्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $\frac{क्ष}{२}=७-\frac{य}{३}$

गुणाकारानें, ... $क्ष=१४-\frac{२य}{३}$

दुसऱ्यांतील, ... $\frac{क्ष}{३}=८-\frac{य}{२}$

गुणाकारानें, ... $क्ष=२४-\frac{३य}{२}$

त्याजकरितां, . . . $२४-\frac{३य}{२}=१४-\frac{२य}{३}$

प्रथमछेद २ त्यांनीं गुणिल्यानें . $४८-३य=२८-\frac{४य}{३}$

दुसरेछेद ३ त्यांनीं गुणिल्यानें . $१४४-९य=८४-४य$

स्थलांतरानें, . . . $१४४-८४=९य-४य$

तर, ... ६० = ५य

अथवा, ... ५य = ६०

भागाकारानें, ... य = $\frac{६०}{५}$ = १२

प्रथमांत यची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, क्ष = १४ − $\frac{२\times१२}{३}$ = १४ − ८ = ६ }
दुसऱ्यांत यची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, क्ष = २४ − $\frac{३\times१२}{२}$ = २४ − १८ = ६ }

हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

चौथें, { ½क्ष + २य = अ ; ½क्ष − २य = ब } त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = अ + ब आणि य = ¼अ − ¼य.

पांचवें, { ७क्ष + य = २९ ; ७य + क्ष = १८ } त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ६ आणि य = ४

साहावें { ½क्ष + ⅓य = ४ ; ⅓क्ष + ½य = ३½ } त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ६ आणि य = ३

सातवें, $\frac{\text{२क्ष}}{\text{३}} + \frac{\text{३य}}{\text{४}} = \frac{\text{५}}{\text{६}}$ आणि $\frac{\text{३क्ष}}{\text{८}} + \frac{\text{२य}}{\text{३}} = \frac{\text{५७}}{\text{१२}}$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदां ची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष=३ आणि य=४

आठवें, क्ष + २य = स आणि $क्ष^२ - ४य^२ = ड^२$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष = \frac{स^२+ड^२}{२स}$ आणि $य = \frac{स^२-ड^२}{४स}$

नववें, क्ष−२य = ड, आणि क्ष : य : : अ : ब, त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदां ची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष = \frac{अड}{अ-२ब}$ आणि $य = \frac{बड}{अ-२ब}$

दुसरीरीति.

दोन समीकरणांत अति सोईनें जें अव्यक्तपद असेल त्याची किंमत प्रथम काढ, नंतर दुसऱ्या समीकरणांत ती किं- मत त्या अव्यक्ताचे स्थळीं लिहिल्यानें दुसरें नवें समीकरण होईल, असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त पद राहील. नंतर

त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणें काढितां येईल.

उदाहरणें.

पहिलें, {क्ष+२य=१७, ३क्ष−य=२} त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे, त्याजकरितां तेथून आरंभ करावा. क्ष=१७−२य म्हणून ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून, ३(१७−२य)−य=२

तर, ... ५१−६य−य=२

स्थळांतरानें, ... −६य−य=२−५१

सर्व चिन्हें बदलं करून . . . . ६य+य=५१−२

तर, ... ७य=४९

भागाकारानें, . य=४९/७=७

तर, . . क्ष=१७−२य

म्हणजे, क्ष=१७−२×७=१७−१४=३ हें उत्तर.

दुसरें, {क्ष+य=११, क्ष−य=३} त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे, त्याजकरितां तेथून आरंभ करावा. $\text{क्ष}=१२-\text{य}$ म्हणून ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून, $१३-\text{य}-\text{य}=३$

स्थळांतरानें व चिन्हें बदल करून . . . . . $२\text{य}=१३-३=१०$

भागाकारानें . . . . $\text{य}=\frac{१०}{२}=५$

तर, ... $\text{क्ष}=१३-\text{य}$

म्हणजे, . . . $\text{क्ष}=१३-५=८$ हें उत्तर.

तिसरें, $\left\{\begin{matrix}\text{क्ष}:\text{य}::\text{अ}:\text{ब}\\ \text{क्ष}^२+\text{य}^२=\text{क}\end{matrix}\right\}$ त्या दोन समीकरणांत क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रमाणास समीकरणरूप दिल्यानें $\text{ब}\text{क्ष}=\text{अ}\text{य}$

भागाकारानें, ... $\text{क्ष}=\frac{\text{अय}}{\text{ब}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहिल्यानें $\left(\frac{\text{अय}}{\text{ब}}\right)^२+\text{य}^२=\text{क}$

अथवा . . . $\frac{\text{अ}^२\text{य}^२}{\text{ब}^२}+\text{य}^२=\text{क}$

छेद काढिल्यानें $\text{अ}^२\text{य}^२+\text{ब}^२\text{य}^२=\text{ब}^२\text{क}$

$\text{अ}^२+\text{ब}^२$ त्यानें भागिल्यानें $\text{य}^२=\frac{\text{ब}^२\text{क}}{\text{अ}^२+\text{ब}^२}$

वर्गमूळानें $\text{य}=\sqrt{\frac{\text{ब}^२\text{क}}{\text{अ}^२+\text{ब}^२}}=\text{ब}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^२+\text{ब}^२}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत यचे स्थळीं लिहिल्यानें, $\text{क्ष}=\frac{\text{अ}\times\text{ब}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^२+\text{ब}^२}}}{\text{ब}}=\text{अ}\sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^२+\text{ब}^२}}$

हें उत्तर.

चवथें, $२क्ष+३य=२९$ आणि $३क्ष-२य=११$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष=७$ आणि $य=५$

पांचवें, $क्ष+य=१४$ आणि $क्ष-य=२$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष=८$ आणि $य=६$.

साहावें, $\left\{\begin{matrix} क्ष : य :: ३ : २ \\ क्ष^{२}-य^{२}=२० \end{matrix}\right\}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष=६$ आणि $य=४$

सातवें, $\frac{क्ष}{३}+३य=२१$ आणि $\frac{य}{३}+३क्ष=२९$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $क्ष=९$ आणि $य=६$

आठवें, $१०-\frac{क्ष}{२}=\frac{य}{३}+४$ आणि $\frac{क्ष-य}{२}+\frac{क्ष}{४}-२=\frac{३य-क्ष}{८}-१$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ८ आणि य = ६.

नववें, क्ष : य : : ४ : २ आणि $क्ष^{२} - य^{२} = १७$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ४ आणि य = २

तिसरीरीति.

सांगितलीं दोन समीकरणें तशा संख्येनें किंवा अक्षर चिन्हानें गुणावीं किंवा भागावीं, कीं जेणेंकरून दोहोंतही एक अव्यक्त पद बरोबर होईल.

नंतर त्यांतील धन ऋण चिन्हें जसें दाखवितात तसें त्या दोन समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यानें एक नवें समीकरण होईल. असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त पद राहील. त्यांची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल. म्हणजे जेव्हां त्या दोन बरोबर अव्यक्तपदांचीं चिन्हें विरूप आहेत, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी. आणि जेव्हां तीं सरूप आहेत तेव्हां वजाबाकी करावी.

टीप, विषमवेळाप्रकाशक पदें समवेळाप्रकाशक

करणें तर परस्परांस परस्परांचे छेदाप्रकाशकांनीं गुणावीं.

उदाहरणें.

पहिलें, { ३क्ष+५य=४० ; क्ष+२य=१४ } ह्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां दुसरे समीकरणास ३ ह्यांनीं गुणून
३क्ष+६य=४२
३क्ष+५य=४०
नंतर त्यांतून प्रथम समीकरण वजा करून, य=२ ही यची किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून क्ष=१४-२य

म्हणजे, क्ष=१४-२×२=१४-४=१०

उत्तर, क्ष=१० आणि य=२

दुसरें, { ५क्ष-३य=९ ; २क्ष+५य=१६ } ह्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य ह्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां ह्या समीकरणांतील प्रथमपदें ज्यांत क्ष अव्यक्तपद आहे तीं इच्छिल्याप्रमाणें बरोबर करितां येतील. अथवा दुसरीं पदें ज्यांत य अव्यक्तपद आहे तीं बरोबर करितां येतील. दोन प्रथमपदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ ह्यांनीं आणि दुसरें ५ ह्यांनीं गुणावें. आणि दुसरीं पदें बरोबर करणें तर प्रथम ५ ह्यांनीं आणि दुसरे ३ ह्या-

नीं गुणावें. जसें पुढें सांगतों.

१ प्रथम पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण २ त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे, $१० क्ष - ६ य = १८$

आणि दुसरें ५ त्यांनीं गुणावे म्हणजे, $१० क्ष + २५ य = ८०$

नंतर वरचें खालच्यांत वजा करून $३१ य = ६२$

भागाकारानें $य = \frac{६२}{३१} = २$ त्याज

करितांही किंमत प्रथमांत यचे स्थळीं लिहून $क्ष = \frac{९+३य}{५} = \frac{९+६}{५} = \frac{१५}{५} = ३$

२ दुसरीं पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण ५ त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे, $२५ क्ष - १५ य = ४५$

आणि दुसरें ३ त्यांनीं गुणावें म्हणजे $६ क्ष + १५ य = ४८$

नंतर दोहोंची मिळवणी करून . $३१ क्ष ** = ९३$

भागाकारानें, ... $क्ष = \frac{९३}{३१} = ३$ ही किंमत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहावी, — $य = \frac{९-५क्ष}{३}$

अथवा . . . . $य = \frac{५क्ष-९}{३} = \frac{५×३-९}{३} = \frac{१५-९}{३} = \frac{६}{३} = २$

उत्तर, $क्ष = ३$ आणि $य = २$

तिसरें, $\frac{क्ष+८}{४} + ६ य = २१$ आणि $\frac{य+५}{३} + ५ क्ष = २३$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ४ आणि य = २

चवथें, $\frac{३क्ष - य}{४}$ + १० = १२ आणि $\frac{३य + क्ष}{२}$ + ५ = १२ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ५ आणि य = ३

पांचवें, $\frac{३क्ष + ४य}{५}$ + $\frac{क्ष}{४}$ = १० आणि $\frac{६क्ष - २य}{३}$ + $\frac{य}{६}$ = १४ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ८ आणि य = ४

साहावें, ३ क्ष + ४ य = ३८ आणि ४ क्ष - ३ य = ९ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

उत्तर, क्ष = ६ आणि य = ५

एकवर्णसमीकरणपृथकरणाची रीति.

जेव्हां तीन आदिकरून अव्यक्त पदें आहेत.

जेव्हां तीन अव्यक्तपदें वेगळाले समीकरणांत येता-त, तेव्हां त्या पुढील रीतीकरून त्यांचें एकच समीकरण हो-ईल.

रीति.

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्तपदाची किंमत काढावी, ती अशीकीं, राहिले दोन अव्यक्तपदांची किंम-त ठाऊक आहेत असें मानून. नंतर त्या किंमतींत प्र-थम दुसरीचे बरोबर करावी, आणि प्रथम किंवा दुसरी ति-सरीचे बरोबर करावी, म्हणजे दोन नवीं समीकरणें हो-तील. ज्यांत दोन मात्र अव्यक्तपदें राहातील. ज्यांची किं-मत पूर्वरीतीकरून निघेल. त्यापासूनच तिसऱ्याची किंमत साफ कळेल.

२ अथवा एक समीकरणांतील एक अव्यक्तपदाची किं-मत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्या अव्यक्तप-दाचे स्थळीं लिहून दोन नवीं समीकरणें होतील, ज्यांत दो-न मात्र अव्यक्तपदें येतील: नंतर पूर्वरीतीकरून त्यांची किंमत निघेल.

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षर-चिन्ह त्यानें गुणावें, अथवा भागावें; ज्यापासून त्या सर्व

समीकरणांत एक पद बराबर होईल. नंतर त्या तीन समीकरणांतून कोणतीही दोन समीकरणें तिसऱ्यांतून वजा केलीं अथवा कोणतेही दोहोंचा तिसऱ्याशीं बेरिज घेतली, जसें त्यांचे चिन्हांपासून कळेल तसें करावें, तर दोन नवीं समीकरणें होतील. अशीं कीं, ज्यांतील अव्यक्त पदांची किंमत पूर्वरीतीकरून काढितां येईल.

आणि त्या रीतीनें ४, ५ किंवा त्याहून अधिक अव्यक्त पदें असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येईल, परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किंमत काढायाची रीति त्याहून थोडक्यांत आणि अतिसोपी आहे, ती बीजगणिताचा अति अभ्यास केला असतां प्रकट होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\left\{\begin{array}{l} क्ष+य+ज्ञ=९ \\ क्ष+२य+३ज्ञ=१६ \\ क्ष+३य+४ज्ञ=२१ \end{array}\right\}$ त्या तीन समीकरणांतील क्ष य आणि ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

पहिले रीतीनें,

त्या प्रत्येक समीकरणांत य आणि ज्ञ त्यांस स्थलांतर करून लिहि.

क्ष = ९ − य − ज्ञ

क्ष = १६ − २य − ३ज्ञ

क्ष = २१ − ३य − ४ज्ञ

नंतर प्रथम किंमत दुसरीशीं बराबर करून ९ − य − ज्ञ = १६ − २य − ३ज्ञ ⎫ हीं दोन नवीं समी-
नंतर दुसरी तिसरीशीं बराबर करून १६ − २य − ३ज्ञ = २१ − ३य − ४ज्ञ ⎭ करणें.

त्यांतील प्रथमांत ९ आणि ज्ञ आणि २य त्यांस

स्थलांतर करून य = ७ − २ज्ञ ⎫ यच्या दोन
दुसऱ्यांत १६ आणि ३ज्ञ आणि ३य त्यांस य = ५ − ज्ञ ⎭
किंमती बराबर करून, ५ − ज्ञ = ७ − २ज्ञ

५ आणि २ज्ञ त्यांस स्थलांतर करून ज्ञ = २

तेव्हां य = ५ − ज्ञ म्हणजे य = ५ − २ = ३.

आणि क्ष = ९ − य − ज्ञ म्हणजे क्ष = ९ − ३ − २ = ४

उत्तर, क्ष = ४ य = ३ ज्ञ = २

दुसरे रीतीनें,

प्रथम समीकरणांत क्ष = ९ − य − ज्ञ ही क्षची किंमत दु-
सऱ्या समीकरणांत लिहून ९ + य + २ज्ञ = १६ ⎫ हीं दोन नवीं समी-
आणि तिसऱ्यांत ९ + २य + ३ज्ञ = २१ ⎭ करणें झालीं.

प्रथमांत ९ आणि २ज्ञ त्यांस स्थलांतर करून य = ७ − २ज्ञ
ही यची किंमत शेवटील समीकरणांत लिहून ९ + १४ − ४ज्ञ + ३ज्ञ = २१

स्थलांतरानें, ... २ = ज्ञ

त्याजकरितां . य = ७ - २ ज्ञ

म्हणजे . . य = ७ - ४ = ३

आणि . . . क्ष = ९ - य - ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष = ९ - ३ - २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्ववत् आहे.

तिसरे रीतीनें,

प्रथम समीकरण दुसऱ्यांतून वजा करून य + २ज्ञ = ७ } हीं दोन नवीं समीकरणें
आणि दुसरें तिसऱ्यांतून वजा करून य + ज्ञ = ५ } झालीं यांतील

प्रथमांतून दुसरें वजा करून ज्ञ = २

त्याजकरितां . . य = ५ - ज्ञ

म्हणजे . . . य = ५ - २ = ३.

आणि . . . क्ष = ९ - य - ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष = ९ - ३ - २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्वदोन उत्तरांबरोबर आहे.

दुसरें, $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = १८ \\ \text{क्ष} + ३\text{य} + २\text{ज्ञ} = ३८ \\ \text{क्ष} + \frac{१}{२}\text{य} + \frac{१}{२}\text{ज्ञ} = १० \end{array}\right\}$ त्या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ ह्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=४, य=६, ज्ञ=८.

तिसरें, $\left\{\begin{array}{l} \text{क्ष} + \frac{१}{२}\text{य} + \frac{१}{३}\text{ज्ञ} = २७ \\ \text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} + \frac{१}{४}\text{ज्ञ} = २० \\ \text{क्ष} + \frac{१}{४}\text{य} + \frac{१}{५}\text{ज्ञ} = १६ \end{array}\right\}$ त्या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=१, य=१२, ज्ञ=६०

चवथें, क्ष−य=२ आणि क्ष−ज्ञ=३ आणि य+ज्ञ=९, त्या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=७, य=५, ज्ञ=४

पांचवें, $\left\{\begin{array}{l} २\text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = ३४ \\ ३\text{क्ष} + ४\text{य} + ५\text{ज्ञ} = ४६ \\ ४\text{क्ष} + ६\text{य} + ८\text{ज्ञ} = ६८ \end{array}\right\}$ त्या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काय?

प्रश्नसमुदाय.

प्रश्नसमुदाय म्हणजे कितीएक प्रश्न, ज्यांपासून एकवर्णसमीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम प्रश्न, दोन संख्या शोधायाच्या, ज्या दोन सं-

त्यांची बेरीज १० होती, आणि वजाबाकी ६ होते.

आतां मोठी संख्या दाखवायाकरितां क्ष आणि लहान संख्या दाखवायाकरितां य घे.* .

तर प्रथम संकेतापासून . क्ष + य = १०

दुसऱ्या पासून . . . क्ष − य = ६

प्रतिसमीकरणांतील य यास स्थळांतरानें क्ष = १० − य } त्या दोन किं-
आणि . . . . . क्ष = ६ + य } मती परस्पर

बरोबर करून, . . . ६ + य = १० − य

स्थळांतरानें, . . . २ य = ४

भागाकारानें, ... य = ४/२ = २

त्याजकरितां, . क्ष = ६ + य

म्हणजे . . . . क्ष = ६ + २ = ८

उत्तर, ८ आणि २

दुसरा प्रश्न, समाजीक रुपये १००० आहेत ते अ ब क त्या तीन जणांस वांटून द्यावे असे कीं अला बपेक्षां

---

* ह्या सर्व उदाहरणांत जितक्या अव्यक्तसंख्या आहेत, त्यांचे स्थळीं तितकीं क्ष, य, ज्ञ इत्यादिक मूळ अक्षरलिपीचे शेवटील अक्षरें घेतात. तर याहून संक्षेप करून अव्यक्तसंख्यांचे प्रतिस्थळीं वेगळालें अक्षरचिन्ह न घेतां कार्य होईल. परंतु शिकणारांस चांगला समज पडून पक्कें व्हावें म्हणून असें लिहिलें.

२०० अधिक आणि बला कपेक्षां १०० अधिक होतील.

क्ष=अचा भाग. य=बचा भाग. आणि ज्ञ=कचा भाग असें असो.

आतां क्ष+य+ज्ञ=१०००

क्ष=य+२००

य=ज्ञ+१००

प्रथम समीकरणांत क्षची किंमत य+२०० लिहिली तर त्या प्रथम समीकरणाचें रूप २य+२००+ज्ञ=१००० असें होईल. नंतर त्यांत यची किंमत ज्ञ+१०० यचे स्थळी ३ज्ञ+४००=१०००

स्थळांतरानें, ... ३ज्ञ=१०००−४००=६००

भागाकारानें, ... ज्ञ=६००/३=२००

आतां य=ज्ञ+१००

म्हणजे य=२००+१००=३००

आणि क्ष=य+२००

म्हणजे क्ष=३००+२००=५००

उत्तर, अ ५००, ब ३००, क २००.

तिसरा, ५००० रुपये २ असामीस वांटून देणें आहेत, असे कीं, त्यांचे भाग परस्पर प्रमाणांत होतील. जसें, ७:८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल?

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें दोन अव्यक्त-भाग दाखवायास घे.

तर प्रश्नाप्रमाणें ७ : ८ : : क्ष : य

त्यास समीकरणरूप देऊन ७ यं = ८ क्ष

आणि . . . क्ष + य = ५०००

दुसरे समीकरणांत यलास्थं० क्ष = ५००० − य ही क्षची किंमत प्रथमांत क्षचे स्थळीं लिहून ७ य = ४०००० − ८ य

८ यं त्यांस स्थळांतर करून १५ य = ४००००

भागाकारानें . . . . य = $\frac{४००००}{१५}$ = २६६६$\frac{२}{३}$

वरचें समीकरण . . . क्ष = ५००० − य

त्यांत य ची किंमत लिहून . . क्ष = ५००० − २६६६$\frac{२}{३}$ = २३३३$\frac{१}{३}$

उत्तर, क्षचा भाग २३३३$\frac{१}{३}$ रुपये आणि यचा २६६६$\frac{२}{३}$

चवथा, ती संख्या काय आहे कीं, जिचा चौथा भाग पांचवे भागाहून १० त्यांनीं अधिक आहे.

इच्छिली अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षरचिन्ह घे.

आतां $\frac{१}{४}$ क्ष − $\frac{१}{५}$ क्ष = १०

प्रथम छेद ४ त्यांनीं गुणून क्ष − $\frac{४}{५}$ क्ष = ४०

दुसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून ५ क्ष − ४ क्ष = २००

तर, ... क्ष = २०० इच्छिली

संख्या हें उत्तर.

पांचवा, ते अपूर्णांक काय आहेत? ज्यांचे अंशांत १ मिळविला असतां त्यांची किंमत $\frac{१}{२}$ आणि छेदांत १ मिळविला तर त्यांची किंमत $\frac{१}{३}$ होते.

एथें अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायास $\frac{क्ष}{य}$ हीं अक्षरचिन्हें घे.

तर प्रश्नाप्रमाणें . . . . $\frac{क्ष+१}{य} = \frac{१}{२}$

आणि . . . . . . $\frac{क्ष}{य+१} = \frac{१}{३}$

प्रथमांत य आणि २ यांनीं गुणून $२ क्ष + २ = य$

दुसऱ्यांत य+१ आणि ३ यांनीं गुणून $३ क्ष = य + १$

प्रथम दुसऱ्यांतून वजा करून $क्ष - २ = १$

स्थलांतरानें, ... $क्ष = १ + २ = ३$

आतां . . . . . . $य = २ क्ष + २$

म्हणजे, ... $य = ६ + २ = ८$

उत्तर, $\frac{३}{८}$ हे इच्छिले अपूर्णांक.

साहावा, एक बिगारी यानें ३० दिवस चाकरी कबूल केली, पुढील करारप्रमाणें ज्या दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पैसे २० आणि ज्या दिवशीं खेळेल किंवा गैरहजीर असेल त्या दिवसाचा उलटा दंड १० पैसे; पुढें ३० दिवस पुरे झाल्यानंतर करारप्रमाणें त्याचे २४० पैसे

निघाले, तेव्हां खेळणें व गैरहजीरी त्यांत किती दिवस गेले ते सांग.

अव्यक्त कामाचे दिवसस्थळीं क्ष आणि खेळणें गैर हजीर त्या दिवसांचे स्थळीं य हीं दोन अक्षरचिन्हें घे.

आतां . . . . . . क्ष+य=२०

आणि . . . . २० क्ष-१० य=२४० } त्या दोहोंची

प्रथम समिकरण १० त्यांनीं गुणून १० क्ष+१० य=२००)

मिळवणी करून, . . ३० क्ष=५४०

भागाकारानें . . . क्ष=५४०/३० =१८ ही क्षची

किंमत दुसरे समीकरणांत क्षचेस्थळीं लिहून य=२०-क्ष

म्हणजे य=३०-१८=१२

उत्तर, कामाचे दिवस १८ खेळ वगैरहजीरी दिवस १२

सातवा, एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें. त्यांतून चतुर्थांश पाणी गळून गेलें आणि काहीं कार्यार्थ २० मण पाणी काढिलें. नंतर त्या पिंपांत काठी उभी करून कमार पाहातां अर्धे पिंप पाणी बाकी आहे. तेव्हां त्या सगळे पिंपांत किती मण पाणी राहील तें सांग.

सगळे पिंपाचें पाणी अव्यक्त त्याचे स्थळीं क्ष मण घे

आतां . . . . ¼ क्ष इतकें पाणी गळून गेलें त्याजक-

रिलां $\frac{१}{४}$ क्ष + ३० मण इतकें पाणी गेलें

तेव्हां $\frac{१}{२}$ क्ष = $\frac{१}{४}$ क्ष + ३० मण

४ त्या छेदांनीं गुणून २ क्ष = क्ष + १२०

क्ष त्यास स्थळांतर करून. क्ष = १२० मण हें उत्तर.

आठवा, २० त्या संख्येचे दोन भाग कर. ते असे कीं, त्यांतील एके भागाची तिपट आणि दुसरे भागाची पांचपट त्यांची बेरीज ७६ होईल.

एथें दोन अव्यक्तभागांचे स्थळीं क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे.

आतां . . . . क्ष + य = २०

आणि . . . . ३ क्ष + ५ य = ७६ ⎫ त्या दोहोंची

प्रथम समीकरण ३ त्यांनीं गुणून ३ क्ष + ३ य = ६० ⎭

वजाबाकी करून . . . . . २ य = १६

भागाकारानें, ... य = $\frac{१६}{२}$ = ८

प्रथम समीकरण . . . . क्ष = २० − य त्यांत यची

किंमत य चे स्थळीं लिहून . . . क्ष = २० − ८ = १२

उत्तर, १२ आणि ८

नववा, एके मनुष्यानें १ पैशाचे २ प्रमाणें कांहीं आंबे खरेदी करून, पुनः तितकेच आंबे १ पैशाचे ३ प्रमाणें खरे-

दी केले. नंतर ते सर्व आंबे कांहीं नफा व्हावा त्या आशेनें २ पैशांचे ५ आंबे त्याप्रमाणें विकले तों शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते ते सांग.

आंब्यांची संख्या प्रत्येक अव्यक्त नीं दाखवायास क्ष अक्षर घे

आतां, . . . $\frac{१}{२}$ क्ष ही पहिले खरेदीची किंमत.

आणि . . . $\frac{१}{३}$ क्ष ही दुसरे खरेदीची किंमत.

जर ५ आंबे : २ पैशास : : २क्ष (सर्व आंबे) : $\frac{४}{५}$ क्ष म्हणून ही दोन खरेद्यांची किंमत आहे. दर ५ आंबे २ पैशांस

तर प्रश्नाप्रमाणें . . . $\frac{१}{२}$ क्ष + $\frac{१}{३}$ क्ष − $\frac{४}{५}$ क्ष = ३

प्रथम छेद २ त्यांनीं गुणून . . . क्ष + $\frac{२}{३}$ क्ष − $\frac{८}{५}$ क्ष = ६

दुसरे छेद ३ त्यांनीं गुणून . . . ३ क्ष + २ क्ष − $\frac{२४}{५}$ क्ष = १८

तिसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून . . . १५ क्ष + १० क्ष − २४ क्ष = ९०

म्हणजे क्ष = ९० प्रति

खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर.

दाहावा, अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळावयास बसले, त्यांत अ चे जवळ ८०० रुपये आणि ब चे जवळ ६०० हे खेळाचे आरंभीं होते. पुढें खेळांत परस्परांची हार जिंक बहुत वेळां होऊन शेवटास उठून गेले ते समयीं अ

चे जवळ रुपये ब जवळ राहिल्याचे तिपट राहिले, तेव्हां अ बजवळून किती रुपये जिंकला तें सांग.

एथें अचे जिंकीचे रुपये अव्यक्त त्यांचे स्थळीं क्ष अक्षर घे.

आतां . . . . ८००+क्ष इतके अचे मुद्दल व जिंक

आणि . . . . ६००−क्ष इतके बचे मुद्दल व हार.

तर प्रश्नाप्रमाणें . . . ८००+क्ष=१८००−३ क्ष

८०० आणि ३ क्ष त्यांस स्थळांतर करून ४ क्ष = १०००

भागाकारानें . . . क्ष = $\frac{१०००}{४}$ = २५०

इतके रुपये ब पासून अ जिंकला हें उत्तर.

अकरावा, दोन संख्या काढ, अशा कीं, ज्यांची वजाबाकी ४ आणि ज्यांचे वर्गांची वजाबाकी ६४ होईल.

उत्तर, ६ आणि १०

बारावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं, प्रथम संख्येचें अर्ध आणि दुसरे संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि प्रथम संख्येचा एक चतुर्थांश आणि दुसरे संख्येचा एक पंचमांश मिळून ५ होतील.

उत्तर, ८ आणि १५

तेरावा, २० ह्या संख्येचे दोन भाग कर. असे कीं, एके भागाचा एक तृतीयांश आणि दुसरे भागाचा एक पंच-

मांत्रा मिळून ६ होतील.

उत्तर, १५ आणि ५.

चौदावा, तीन संख्या काढ. अशा कीं, प्रथम आणि दुसरी त्यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी त्यांची बेरीज ८ आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज ९ होतील.

उत्तर, ३ आणि ४ आणि ५.

पंधरावा, कोणी एक गृहस्थ होता, त्याजवळ रुपये २८००० हजार होते, त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या अशीं दोन अपत्यें होतीं पुढें तो मरण पावला. त्यानें पूर्वीच लिहून ठेविलें होतें कीं, पुत्रास १ रुपया १ पावला आणि कन्येस २ पावले त्याप्रमाणें वांटून द्यावे. तेव्हां ते रुपये त्याचे लेखाप्रमाणें वांटून देतां कोणास किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग.

उत्तर, पुत्रास २०००० कन्येस ८०००

सोळावा, अ, ब, क त्या त्रिवर्गांनीं सर्कत केली, त्यांत सगळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत बचे अचे दुपट आणि वर २०० आणि कचे अ आणि ब त्यांचे बेरिजे बराबर, तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, अचे ६०० बचे १४००, आणि कचे २०००

सत्रावा, कोणी एक मनुष्यानें १००० रुपये कर्ज देणें होतें, तें चुकवितेसमयीं त्यानें कांहीं मोहोरा व कांहीं रुपये अशी खिचडी मिळून नग २०२ देऊन तें बराबर चुकविलें, तेव्हां त्यांत मोहरा किती व रुपये किती तें सांग.

उत्तर, ५७ मोहरा आणि १४५ रुपये.

अठरावा, अ आणि ब हे दोघे मित्र होते, त्यांत अ बला सांगेकीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजजवळ तुझे बाकीचे दुपट रुपये होतील, तसें ब अला सांगे कीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजवळ तुझे बाकीचे तिपट रुपये होतील, तेव्हां एकेकाजवळ रुपये किती किती होते तें सांग.

उत्तर, अ२२ ब२६

एकुणिसावा, कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेऊन बाजारांत गेला, तेथें एके दुकानीं सामानाबद्दल २ रुपये खर्च करून पुढें चालला, नंतर जवळ रुपये अधिक असावे म्हणून जे बाकी राहिले होते त्यांचे बराबर रुपये दुसऱ्यापासून कर्ज घेतले, नंतर दुसऱ्या दुकानीं गे-

ला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपयांब-
राबर पूर्ववत् कर्ज घेऊन तिसरे दुकानीं गेला तेथें २ रुपये
खर्च करून पुनः जवळचे बाकीबराबर पूर्ववत् कर्ज घेऊ-
न चौथे दुकानीं गेला. तेथें २ रुपये खर्च केले तों जवळ
बाकी कांहीं नाहीं असें झालें. तेव्हां तो गृहस्थ मुळीं किती
रुपये घेऊन बाजारांत गेला तें सांग.

उत्तर, २ रुपये आणि २ पावले.

विसावा, कोणी एक मनुष्य, त्याची स्त्री आणि पुत्र त्यांसहवर्तमान प्रवासास गेला होता, तेथें मार्गी कोणाएकाचे घरीं तीं तिघें जणें भोजनास गेलीं. तेव्हां त्यानें भोजनखर्च सांगितला कीं, मुलास रुपया $\frac{१}{२}$ आणि बायकोस मुलाबरोबर आणि पुरुषाचा $\frac{१}{४}$ अधिक. आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री त्यांचे बरोबर इतके रुपये पडतील, असें बोलणें ठरवून भोजन दिलें. पुढें त्यांनीं काय काय द्यावें तें सांग

उत्तर, बायकोस ३ पा. .. ३३$\frac{१}{३}$ रे. पुरुषास १ रु. .. १ पा. .. ३३$\frac{१}{३}$ रे.

एकविसावा, एक कोठार आहे त्यांत ६० खंडी धान्य राहातें, त्यांत त्रेवटी डाळ त्या रीतीनें भरली होती. (त्रेवटी म्हणजे चणे तुरी आणि उडीद त्यांच्या डाळी एकत्रमिश्रित) उडदांची डाळ चण्याचे डाळी पेक्षां ६ खंडी अधिक, आणि

तुरींची डाळ उडदांची डाळ आणि चण्यांचे डाळीचा $\frac{१}{५}$ इतक्याचे बराबर होती. तेव्हां त्या तीन डाळी प्रत्येकीं किती किती खंडी होत्या तें सांग.

उत्तर, चण्यांची खं. १५ उडदांची खं. २१ तुरींची खं. २४

बाविसावा, कोणेएके सरदाराजवळ फौज होती, ती चौरस आकृति उभी केली तर २८४ मनुष्यें बाकी राहातात, आणि त्या चौरस आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एकेक मनुष्य वाढविलें तर २५ मनुष्यें कमी येतात. तेव्हां ती सर्व फौज किती होती सांग.

उत्तर, २४०००

तेविसावा, ती संख्या काय आहे कीं, जीस ३, ५, ८ हे पर्यायानें मिळविले असतां तीन बेरजा भूमितिप्रमाणांत होतील.

उत्तर, १

चोविसावा, कोणी तिघांजणांनीं सर्कती व्यापार केला, तेथें भांडवलरुपये ७६०० त्यांत प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळून तिसऱ्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात. तसें दुसरा आणि तिसरा त्यांचे भाग मिळून प्रथमापेक्षां ३६०० रुपये अधिक होतात. तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, पहिल्याचे २००० दुसऱ्याचे २००० तिसऱ्याचे २६००

पंचविसावा, त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत कीं ज्या परस्परांस आहेत, जसें, ३ : ४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बेरिजेचे बारापट आहे.

उत्तर, २१, २८.

सव्विसावा, किती एक मनुष्यें खाणावळ कबूल करून कोणाएकाचे घरीं जेवायास गेलीं होतीं. त्यांत ४ मनुष्यें अधिक असतीं तर सर्वांस प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता, आणि त्यांत ३ उणीं असतीं तर एकेकास अर्धअर्ध रुपया अधिक पडता. तेव्हां सर्व मनुष्यें किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्वमिळून किती रुपये तें सांग.

उत्तर, २४ मनुष्यें प्रत्येकास रुपये ३ · · पा. २ आणि सर्व बेरीज रुपये ८४

सत्ताविसावा, कोणे एके शिलेदाराजवळ २ तट्टू आणि २ जीन होते. त्यांत एक जीन बहुमोल त्याची किंमत रुपये १८० आणि दुसरा जीन अल्पमोल त्याची किंमत रुपये ३० जेव्हां प्रथम तट्टूवर बहुमोल जीन आणि दुसरे तट्टूवर अल्पमोल जीन घालतो तेव्हां प्रथमाची किंमत दुसऱ्याचे दुपट होते. आणि जेव्हां प्रथमावर अल्पमोल जीन आणि दुसऱ्यावर बहुमोल जीन असें घालतो तेव्हां दुसऱ्याची किंम-

त प्रथमाचे तिपट होते. तेव्हां त्या दोन तट्टूंची जिनावांचू-न वेगळाली किंमत काय आहे ती सांग.

उत्तर, प्रथमाची ६० रुपये, दुसऱ्याची १० रुपये.

अठ्ठाविसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्याप-रस्परांस आहेत जसें २:३ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६ मिळविले असतां त्या दोन बेरजा परस्परांस होतील. जसें ४:५

उत्तर, ६ आणि ९

एकुणतिसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, ज्यांत मोठी लाहानीस आहे, जशी त्यांची बेरीज २० त्या संख्येस आहे आणि त्यांची वजाबाकी १० त्या संख्येस आहे.

उत्तर. १५आणि४५

तिसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत? ज्यांची व-जाबाकी, बेरिज, आणि गुणाकार त्यास होते जशी २ ही सं-ख्या ३ आणि ५ त्यांस आहे

उत्तर, २ आणि १०

एकतिसावा, गणितश्रेढीच्या त्या तीन संख्या काय आहेत? ज्यांत प्रथम तिसरीस आहे. जसें ५: ९ आणि त्या तिहींची बेरीज ६३ होतील.

उत्तर, १५, २१ आणि २७

बत्तिसावा, २४ त्या संख्येचे दोन भाग कर असे कीं, मोठा भाग लाहान भागानें भागिला आणि लाहान भाग मोठे भागानें भागिला तर ते दोन भागाकार परस्परांस होतील. जसे ४:१

उत्तर १६ आणि ८.

तेहतिसावा, दोन गृहस्थ परस्पर अनेक गोष्टी बोलत होते, त्यांत एकानें दुसऱ्यास विचारिलें कीं, तुम्हांस पुत्र २ त्यांचीं वयें काय आहेत? तेव्हां त्यानें सांगितलें जे त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बेरिजेंत १८ मिळविले असतां वडील पुत्राचे वयाचे दुपट होतात, आणि दोघांचे वयांचे वजाबाकींत ६ वजा केले तर धाकट्याचे वयाबरोबर होतात.

उत्तर, ३० आणि १२ वर्षे.

चौतिसावा, त्या चार संख्या काय आहेत? ज्यांत प्रथम आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज १३ होतील. आणि प्रथम दुसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १५ होतील. तसें प्रथम तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १८, तसें दुसरी तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज २० होतील.

उत्तर, २, ४, ७ आणि ९

पत्तिसावा, ४८ त्या संख्येचे चार भाग कर असे कीं, प्रथमांत २ मिळविले ती बेरीज, दुसऱ्यांतून २ वजा केले ती बाकी, तिसरा तिहींनीं गुणिला तो गुणाकार, आणि चवथा तिहींनीं भागिला तो भागाकार, हे सर्व परस्पर बराबर होतील.

उत्तर, ६, १२, २, आणि २७

क्कत्तिसावा, कोणीएक फडिया सावकार आंबेमोहोर आणि पटण त्या दोन जातींचे तांदूळ १०० मण एकत्र करून विकायास इच्छितो, त्यांत आंबेमोहोर २ रुपये मण आणि पटण १ रुपया २ पावल्यांनीं मण पडले; आणि हालीं सकटभाव १ रुपया २ पावले ५० रेसांनीं मण असा आहे तेव्हां त्यानें कोणते ज़ातीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करावे, म्हणजे पडले भावांत तोटा न येईल तें सांग.

उत्तर, आंबेमोहोर २५ मण, पटण ७५ मण.



वर्गसमीकरण.

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे.

एकाकी वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदाचा वर्ग मात्र येतो. जसें $अ क्ष^{२} = ब$. आणि त्या जातीचे वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पूर्वी एकवर्णसमीकर्णांत सांगितली आहे.

संयुक्तवर्गसमीकरण तेंच होय, ज्याचे एक पदांत अव्यक्तपदाचा वर्ग येतो; आणि दुसरे पदांत त्याच अव्यक्तपदाचा प्रथम घात येतो. जसें $अक्ष^{२} + बक्ष = क$.

सर्व संयुक्त वर्गसमीकरणाचीं पूर्वी सांगितलें रीतीकरून पृथक्करणें केल्यानंतर तीं समीकरणें पुढील तीन सारणीकोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाचीं होतील. जें रूप अव्यक्तपदाची किंमत काढायाकरितां त्यास दिलें पाहिजे.

$$१ \quad क्ष^{२} + अक्ष = ब$$

$$२ \quad क्ष^{२} - अक्ष = ब$$

$$३ \quad क्ष^{२} - अक्ष = - ब$$

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगतों त्याप्रमाणें आहे, ज्यास वर्गपूरणीकरण म्हणतात

१ सांगितले वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीनें सरळ करावें. असें कीं, वरचे तीन कोश्टकांतून एक कोश्टकासारखें रूप होईल. त्याची रीति, पदांस स्थळांतर करावें. असें कीं, अव्यक्तपदें समीकरणाचें एक बाजूस होतील, आणि व्यक्तपदें दुसरे बाजूस आणि ज्यांत वर्ग आहे तें पद प्रथम स्थळीं, तसें ज्यांत प्रथम घात आहे तें पद दुसरे स्थळीं, या प्रमाणें करावें. नंतर अव्यक्तवर्गपदांस अंक अथवा अक्षरचिन्ह वेळाप्रकाशक असेल तर त्यानें समीकरणाचीं सर्व पदें भागावीं. आणि जर तें अव्यक्त वर्गपद ऋण (-) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्व पदांचीं धन (+) ऋण (-) चिन्हें बदल करावीं. कारण, अव्यक्तवर्गपद धन (+) असल्यावांचून पृथक्करण होत नाहीं. तेव्हां समीकरणाचें पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें. त्यारीतीनें.

२ वर्गसमीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग करावा, त्या रीतीनें दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचें अर्ध घेऊन त्याचा वर्ग करावा. आणि हा वर्गसमीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा. तेव्हां समीकरणाचे ज्या बाजूंत अव्यक्तपद आहे त्या बाजूचा पुरा वर्ग होईल.

३ नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचें वर्गमूळ काढावें,

म्हणजे अव्यक्तपदाची किंमत प्रकट होईल. समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (±) अशी करावी म्हणजे समीकरणाचीं दोन मुळें निघतील अथवा अव्यक्तपदाच्या दोन किंमती निघतील.*

---

* कोणतेही पदाचें वर्गमूळ धन + किंवा − ऋण असेल याजकरितां सर्व वर्गसमीकरणाचें पृथक्करण दोन प्रकारचें होतें. जसें $+न^{२}$ याचें वर्गमूळ $+न$ किंवा $-न$ आहे. कारण $+न\times+न$ आणि $-न\times-न$ हे दोनही $+न^{२}$ होतात. परंतु $-न^{२}$ अथवा $\sqrt{-न^{२}}$ हें सर्व मिथ्याभासवत् किंवा अशक्य. कारण, $+न$ किंवा $-न$ या दोहोंचाही वर्ग $-न^{२}$ होत नाहीं.
जसें प्रथम सारणीकोष्टकांत $क्ष^{२}+अक्ष=ब$ यांतून निघतें कीं, $क्ष+\frac{१}{२}अ=\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ म्हणजे हें मूळ $+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ अथवा $-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ असेल. कारण यांतून कोणतेही एकानें त्याचें तेंच गुणिलें असतां $ब+\frac{१}{४}अ^{२}$ हा वर्ग होतो. याजकरितां याप्रमाणें मुळांत भ्रम राहतो तो राखवायाकरितां मुळाचे मागें ± हीं दोन चिन्हें लिहितात. जसें $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$.

या सारणी कोष्टकांत $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$. क्ष अव्यक्तपदाची प्रथम किंमत म्हणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा धन + आहे. कारण $\frac{१}{४}अ^{२}+ब$ हें $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे. तेव्हां मोठे वर्गाचें निश्चयें मोठें मूळ असावें. याजकरितां $\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ हें वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ म्हणजे $\frac{१}{२}अ$ याहून मोठें आहे. याजकरितां $+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा धन + होईल.

दुसरी किंमत म्हणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा ऋण − होईल. कारण, यांचीं दोनही पदें ऋण − आहेत. याजकरितां जेव्हां $क्ष^{२}+अक्ष=ब$. तेव्हां क्षची धन + किंमत म्हणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$

१ **टीप**. समीकरणाचे प्रथम बाजूचें मूळ सर्वदा बराबर आहे जें प्रथमपदाचें मूळ दुसरे पदाचे घातप्रकाश काचे अर्धानें युक्त दुसरें पद + किंवा ऋण − असेल तशा चिन्हानेंही.

२ सर्व समीकरणें ज्यांत अव्यक्तपदांचीं दोन पदें येतात आणि प्रथमपदाचा घातप्रकाशक दुसरे पदाचे घातप्रकाशकाचे दुपट आहे. तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वप्रमाणें वर्गसमीकरणरीतीनेंच वर्ग पुरा केल्यानें होतें.

आणि क्षची ऋण − किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = -\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}-\frac{१}{२}\text{अ}$.

दुसरे सारणीकोष्टकांत म्हणजे $\text{क्ष} = \pm\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$. यांत क्षची प्रथम किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = +\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ ही सर्वदा धन आहे. कारण दोनही पदें धन + आहेत. परंतु दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = -\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ ही सर्वदा ऋण − होईल. कारण $\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}$ हें $\frac{१}{४}\text{अ}^{२}$ याहून अधिक आहे. याजकरितां $\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}$ म्हणजे $\frac{१}{२}\text{अ}$ याहून मोठें आहे. म्हणून $-\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ हें सर्वदा ऋण आहे.

याजकरितां जेव्हां $\text{क्ष}^{२}-\text{अक्ष}=\text{ब}$ तेव्हां क्षची धन + किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = +\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$ आणि क्षची ऋण − किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = -\sqrt{\text{ब}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}$

यापासून कळतेंकीं, दोन प्रथमसारणीकोष्टकांत सर्वदा अव्यक्तपदाच्या दोन किंमती निघतात. त्यांत एक धन + आणि दुसरी ऋण − आहे.

जसें $क्ष^{६}+अक्ष^{३}=ब$ अथवा $क्ष^{२न}+अक्ष^{न}=ब$ किंवा $क्ष+अक्ष^{\frac{१}{२}}=ब$ हीं सर्व समीकरणासारखीं आहेत. आणि त्यांचें पृथक्करण त्या वर्गपृथक्करणाप्रमाणें होतें

परंतु तिसरे सारणीकोष्टकांत जेव्हां $क्ष=\pm\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ त्यांत क्षच्या दोन किंमती धन होतील. जेव्हां $\frac{१}{४}अ^{२}$ हा बहुत अधिक आहे. आतां क्षची प्रथम किंमत म्हणजे $क्ष=+\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ ही धन होईल. कारण दोनही पदें धन+ आहेत.

दुसरी किंमत म्हणजे $क्ष=-\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ हीही धन+ आहे. कारण $\frac{१}{४}अ^{२}$ हें $\frac{१}{४}अ^{२}-ब$ याहून अधिक आहे. याजकरितां $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ म्हणजे $\frac{१}{२}अ$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}$ याहून अधिक आहे. म्हणून $-\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा धन + होईल. अशापासून जेव्हां $क्ष^{२}-अक्ष=-ब$ तेव्हां क्षची प्रथम किंमत $क्ष=+\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ आणि दुसरी म्हणजे $क्ष=-\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ या दोनही किमती धन आहेत.

परंतु या तिसरे सारणीकोष्टकांत जर बची किंमत $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक असेल तर अशे प्रश्नाचें पृथक्करण करायास अशक्य आहे. कारण, कोणतेंही पद धन+ किंवा −ऋण असो परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा धन आहे. याजकरितां ऋण पदाचें वर्गमूळ अशक्य. आणि जेव्हां ब हा $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे तेव्हां $\frac{१}{४}अ^{२}-ब$ हें ऋण पद होईल. आणि याजकरितां त्याचें वर्गमूळ म्हणजे $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}$ हा मिथ्याभास किंवा अशक्य आहे. याजकरितां याप्रकारांत $क्ष=\frac{१}{२}अ\pm\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}$ म्हणजे क्षच्या दोन किमती अशक्य किंवा मिथ्याभास पदें आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, क्ष^२ + ४ क्ष = ६० ह्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . क्ष^२ + ४ क्ष = ६०

वर्ग पुरा करून . . क्ष^२ + ४ क्ष + ४ = ६० + ४ = ६४

नंतर मूळ काढून . . . क्ष + २ = ± ८

२ त्यांस स्थळांतर करून . . क्ष = ६ किंवा − १० हीं दोन मुळें हें उत्तर.

दुसरें, क्ष^२ − ६ क्ष + १० = ६५ ह्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . क्ष^२ − ६ क्ष + १० = ६५

१० त्यांस स्थळांतर करून . क्ष^२ − ६ क्ष = ५५ .

वर्ग पुरा करून . . . क्ष^२ − ६ क्ष + ९ = ६४

नंतर मूळ काढून . . . क्ष − ३ = ± ८

पुनः ३ त्यांस स्थळांतर करून क्ष = ११ किंवा − ५ हें उत्तर.

तिसरें, २ क्ष^२ + ८ क्ष − ३० = ६० ह्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां २ क्ष^२ + ८ क्ष − ३० = ६०

३० त्यांस स्थळांतर करून २क्ष² + ८क्ष = ९०

२ त्यांनीं भागून . . . क्ष² + ४क्ष = ४५

वर्ग पुरा करून क्ष² + ४क्ष + ४ = ४९

नंतर मूळ काढून क्ष + २ = ± ७

पुनः २ त्यांस स्थळांतर करून क्ष = ५ किंवा −९ हें उत्तर.

चवथें, ३क्ष² − ३क्ष + ९ = ८$\frac{१}{३}$ ह्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . ३क्ष² − ३क्ष + ९ = ८$\frac{१}{३}$

३ त्यांनीं भागून . . क्ष² − क्ष + ३ = २$\frac{७}{९}$

३ त्यांस स्थळांतर करून . क्ष² − क्ष = −$\frac{२}{९}$

वर्ग पुरा करून . . क्ष² − क्ष + $\frac{१}{४}$ = $\frac{१}{३६}$

नंतर मूळ काढून . क्ष − $\frac{१}{२}$ = ± $\frac{१}{६}$

पुनः $\frac{१}{२}$ त्यांस स्थळांतर करून क्ष = $\frac{२}{३}$ किंवा-$\frac{१}{३}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{१}{२}$क्ष² − $\frac{२}{३}$क्ष + ३०$\frac{१}{२}$ = ५२$\frac{२}{३}$ ह्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

आतां . . . $\frac{१}{२}$क्ष² − $\frac{२}{३}$क्ष + ३०$\frac{१}{२}$ = ५२$\frac{२}{३}$

३०$\frac{१}{२}$ त्यांस स्थळांतर करून . $\frac{१}{२}$क्ष² − $\frac{२}{३}$क्ष = २२$\frac{१}{६}$

२ त्यांनीं गुणून . . . क्ष² − $\frac{४}{३}$क्ष = ४४$\frac{१}{३}$

वर्ग पुरा करून क्ष² − $\frac{४}{३}$क्ष + $\frac{४}{९}$ = ४४$\frac{७}{९}$

मूळ काढून $क्ष - ½ = \pm ६½$

पुनः ½ त्यास स्थळांतर करून $क्ष = ७$ किंवा $-६½$ हें उत्तर.

साहावें, $अक्ष^{२} - बक्ष = क$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां . . . $अक्ष^{२} - बक्ष = क$

अ त्यानें भागून . $क्ष^{२} - \frac{ब}{अ} क्ष = \frac{क}{अ}$

वर्ग पुरा करून . . $क्ष^{२} - \frac{ब}{अ} क्ष + \frac{ब^{२}}{४अ^{२}} = \frac{क}{अ} + \frac{ब^{२}}{४अ^{२}}$

नंतर मूळ काढून . . $क्ष - \frac{ब}{२अ} = \pm \sqrt{\frac{४अक + ब^{२}}{४अ^{२}}}$

$\frac{ब}{२अ}$ त्यांस स्थळांतर करून $क्ष = \pm \sqrt{\frac{४अक + ब^{२}}{४अ^{२}}} + \frac{ब}{२अ}$ हें उत्तर.

सातवें, $क्ष^{४} - २अक्ष^{२} = ब$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां . . . . $क्ष^{४} - २अक्ष^{२} = ब$

वर्ग पुरा करून . . $क्ष^{४} - २अक्ष^{२} + अ^{२} = अ^{२} + ब$

मूळ काढून . . . $क्ष^{२} - अ = \pm \sqrt{अ^{२} + ब}$

अ त्यास स्थळांतर करून . . $क्ष^{२} = \pm \sqrt{अ^{२} + ब} + अ$

नंतर वर्गमूळ काढून . . $क्ष = \pm \sqrt{अ + \sqrt{अ^{२} + ब}}$

त्या रीतीनें सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेघांस लिहून शिकणारे चांगले समजदार होऊन पुढील उदा

हरणाचीं पृथक्करणें लौकर करितील असें त्यास शिकवावें

आठवें, क्ष^{२} - ६ क्ष - ७ = ३३ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = १०

नववें, क्ष^{२} - ५ क्ष - १० = १४ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर. क्ष = ८

दाहावें, ५ क्ष^{२} + ४ क्ष - ९० = ११४ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = ६.

अकरावें, $\frac{१}{२}$ क्ष^{२} - $\frac{१}{४}$ क्ष + २ = ९ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = ४

बारावें, ३ क्ष^{४} - २ क्ष^{२} = ४० त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = २

तेरावें, $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{२}$ √ क्ष = १$\frac{१}{२}$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = ९

चौदावें, $\frac{१}{२}$ क्ष^२ + $\frac{१}{३}$ क्ष = $\frac{१}{२}$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, क्ष = ७२७७६६

पंधरावें, क्ष^६ + ४ क्ष^३ = १२ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, क्ष = $\sqrt[३]{२}$ = १·२५९९२१

सोळावें, क्ष^२ + ४ क्ष = अ^२ + २ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे?

उत्तर, क्ष = $\sqrt{अ^२+६}$ - २

प्रश्न

ज्यांपासून वर्गसमीकरणें उत्पन्न होतात.

पहिलें, त्या दोन संख्या काढ, ज्यांची वजाबाकी २ आणि ज्यांचा गुणाकार ८० होतो.

इच्छिल्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरचिन्हें घे*.

---

* या प्रश्नांत जसें एकवर्णसमीकरणांत आहे कीं, जितकीं अव्यक्त

आतां प्रथमसंकेताप्रमाणें . . . . $क्ष - य = २$

दुसऱ्याप्रमाणें . . . . . $क्षय = ८०$

प्रथमांतील य त्यास स्थलांतर करून . . $क्ष = य + २$

क्षची किंमत दुसऱ्यांत लिहून . . $य^२ + २य = ८०$

वर्ग पुरा करून . . . $य^२ + २य + १ = ८१$

मूळ काढून . . . . . $य + १ = ९$

१ त्यांस स्थलांतर करून . . . $य = ८$

वरप्रमाणें क्षची किंमत . . . $क्ष = य + २ = १०$

उत्तर, १० आणि ८

दुसरा, १४ त्या संख्येचे दोन भाग कर. असे कीं, त्यांचा गुणाकार ४८ होईल.

दोन अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें घे.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें . . $क्ष + य = १४$

आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . $क्षय = ४८$

षरें आहेत, तितकीं अक्षरचिन्हें घेतात. पृथक्करण करायास तसेंच आहे, परंतु याहून संक्षेपरीति आहे पण अभ्यास करण्यास आरंभीं ती उपयोगी नव्हे. कारण प्रथमच कठीण लागलें तर पुढें समज होणें दुर्घट.

प्रथमसमीकरणांतील य त्यास स्थळां॰ $क्ष=१४-य$ ही क्षची किंमत दुसरे समीकरणांतील क्ष चे स्थळीं लिहून $१४य-य^२=४८$ वर्ग धन करायाकरितां सर्व चिन्हें बदल करून $य^२-१४य=-४८$

नंतर वर्ग पुरा करून . . . $य^२-१४य+४९=१$

वर्गमूळ काढून . . . . $य-७=\pm १$

७ त्यास स्थळांतर करून . $य=८$ आणि ६ हे इच्छिले दोन भाग हें उत्तर.

तिसरा, ज्या दोन संख्यांची बेरीज ९ होते, आणि ज्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ त्या दोन संख्या काय आहेत?

त्या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरें घे.

आतां प्रथमसंकेताप्रमाणें . . $क्ष+य=९$

आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . $क्ष^२+य^२=४५$

प्रथम समीकरणांतील य त्यास स्थळांत॰ $क्ष=९-य$ ही क्षची किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून $८१-१८य+२य^२=४५$

८१ त्यास स्थळांतर करून . $२य^२-१८य=-३६$

२ त्यांनीं भागून . . . $य^२-९य=-१८$

नंतर वर्ग पुरा करून $य^२-९य+\frac{८१}{४}=\frac{९}{४}$

वर्गमूळ काढून $य-\frac{९}{२}=\pm\frac{३}{२}$

आतां $\frac{५}{२}$ त्यांस स्थळांतर करून य $= \pm \frac{३}{२} + \frac{५}{२} = ६$ आणि २ त्या इच्छिल्या दोन संख्या हें उत्तर.

चवथा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्यांची बेरीज गुणाकार आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी हीं तीनही बराबर आहेत.

अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे.

प्रथम आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . क्ष + य = क्षय

प्रथम आणि तिसरे संकेताप्रमाणें . . क्ष + य = क्ष^{२} − य^{२}

दुसऱ्याच्या दोन बाजू क्ष + य त्यांनीं भागून . १ = क्ष − य

य त्यास स्थळांतर करून य + १ = क्ष ही क्षची किंमत

प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहून २य + १ = य^{२} + य

२य त्यांस स्थळांतर करून . . . १ = य^{२} − य

वर्ग पुरा करून . . . . . $\frac{५}{४}$ = य^{२} − य + $\frac{१}{४}$

मूळ काढून . . . . $\frac{१}{२}\surd५$ = य − $\frac{१}{२}$

$\frac{१}{२}$ त्यास स्थळांतर करून . $\frac{१}{२}\surd५ + \frac{१}{२}$ = य

आणि वरचे समीकरणाप्रमाणें क्ष = $\frac{१}{२}\surd५ + \frac{३}{२}$

त्या कोष्टकांतील √५ त्याची किंमत दशांशांत काढून क्ष = + २·६१८० इत्यादिक निघेल, आणि य = + १·६१८० इत्यादिक.

पांचवा, गणितश्रेढींत त्या चार संख्या काय आहेत कीं, ज्यांचे दोन शेवटांचा गुणाकार २२ आहे, आणि दोन मध्यपदांचा गुणाकार ४० होतो.

अति लहान अव्यक्त पद दाखवायास क्ष अक्षर घे आणि अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे.

तर क्ष, क्ष+य, क्ष+२ य, क्ष+३ य, हीं चार पदें त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें . . . $क्ष^{२} + २ क्षय = २२$

दुसरे संकेताप्रमाणें . . $क्ष^{२} + ३ क्षय + २ य^{२} = ४०$

दुसऱ्यांतून प्रथम वजा करून . . . . $२ य^{२} = १८$

२ त्यांनीं भागून . . . . . $य^{२} = ९$

वर्गमूळ काढून . . . य = ३ हें उत्तर आहे.

य ची किंमत प्रथमांत लिहून $क्ष^{२} + ९ क्ष = २२$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^{२} + ९ क्ष + \frac{८१}{४} = \frac{१६९}{४}$

मूळ काढून $क्ष + \frac{९}{२} = \frac{१३}{२}$

$\frac{९}{२}$ त्यास स्थळांतर करून क्ष = २ हें अतिलाहान पद त्याजकरितां २, ५, ८, ११ त्या इच्छिल्या चार संख्या हें उत्तर.

साहावा, भूमितिश्रेढींत त्या तीन संख्या काय

आहेत. कीं, ज्यांची बेरीज ७ होते आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होते.

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायास क्ष य आणि ज्ञ हीं तीन अक्षरें घे

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें $क्ष ज्ञ = य^2$

आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . $क्ष + य + ज्ञ = ७$

आणि तिसरे संकेताप्रमाणें . $क्ष^2 + य^2 + ज्ञ^2 = २१$

दुसऱ्यांतील य त्यास स्थलांतर करून $क्ष + ज्ञ = ७ - य$ त्याच समीकरणाचे दोनही बाजूंचे वर्ग करून $क्ष^2 + २ क्ष ज्ञ + ज्ञ^2 = ४९ - १४ य + य^2$

२ क्ष ज्ञ त्यांचे स्थळीं प्रथमांतील क्ष ज्ञ त्यांची किंमत $य^2$ नी लिहून $क्ष^2 + २ य^2 + ज्ञ^2 = ४९ - १४ य + य^2$

दोन बाजूंचे $य^2$ वजा करून $क्ष^2 + य^2 + ज्ञ^2 = ४९ - १४ य$

आतां $क्ष^2 + य^2 + ज्ञ^2$ त्याच्या दोन किमतींची बराबरी करून } $२१ = ४९ - १४ य$

२१ आणि १४ य. त्यास स्थलांतर करून $१४ य = २८$

१४ त्यांनीं भागून . . . $य = २$ हें दुसरें पद ही

य ची किंमत प्रथमांत लिहून . . $क्ष ज्ञ = ४$

चौथ्या समीकरणांतील लिहून . . $क्ष + ज्ञ = ५$ ह्या शेवटील समीकरणांतील ज्ञ त्यास स्थलांतर करून $क्ष = ५ - ज्ञ$ ही क्ष ची किं-

मग त्या शेवटिल्याचे वर्गसमीकरणांतलिहून . $५क्ष - क्ष^{२} = ४$

वर्ग धन करावयास सर्व चिन्हें बदल करून . $क्ष^{२} - ५क्ष = -४$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^{२} - ५क्ष + \frac{२५}{४} = \frac{९}{४}$

मूळ काढून . . . . . $क्ष - \frac{५}{२} = \pm \frac{३}{२}$ –

$\frac{५}{२}$ त्यांस स्थळांतर करून . $क्ष = ४$ अथवा १ ही क्षची किंमत

त्याजकरितां १ , २ , ४ त्या इच्छिल्या तीन संख्या हें उत्तर .

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न .

पूर्वी सांगितलें कीं, अव्यक्त पदें आहेत तितकीं अक्षर चिन्हें घ्यावीं म्हणून . परंतु त्याशिवाय दुसरी रीति आहे तिचीं उदाहरणें लिहितों .

उदाहरणें .

पहिलें, दोन संख्या काढ अशा कीं, त्यांची वजाबाकी ८ आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल .

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर $क्ष + ८ =$ मोठी संख्या

आणि प्रश्नाप्रमाणें $क्ष(क्ष + ८)$ म्हणजे $क्ष^{२} + ८क्ष = २४०$

वर्ग पुरा करून . . . क्ष^2 + ८ क्ष + १६ = २५६

वर्गमूळ काढून . . . क्ष + ४ = १६

४ त्यांस स्थळांतर करून . क्ष = १२ ही लाहान संख्या

तेव्हां क्ष + ८ = १२ + ८ = २० ही मोठी संख्या हें उत्तर.

दुसरा, ६० त्या संख्येचे दोन भाग कर. असे कीं, त्यांचा गुणाकार ८६४ होईल.

आतां मोठा अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . ६०-क्ष = लाहान भाग

आणि प्रश्नाप्रमाणें क्ष(६०-क्ष) म्हणजे ६०क्ष - क्ष^2 = ८६४

दोन बाजूंचीं सर्व चिन्हें बदल करून क्ष^2 - ६० = - ८६४

वर्ग पुरा करून . . . क्ष^2 - ६० क्ष + ९०० = ३६

वर्गमूळ काढून . . . . क्ष - ३० = ± ६

३० त्यांस स्थळांतर करून . .. क्ष = ± ६ + ३०

त्याजकरितां क्ष = ६ + ३० = ३६ अथवा ३० - ६ = २४ म्हणजे ३६ आणि २४ हे दोन इच्छिले भाग हें उत्तर.

तिसरा, दोन संख्या असाव्या, त्या अशा कीं त्यांची बेरीज १० (अ) असेल, आणि त्यांचे वर्गाची बेरीज ५८ (ब) असेल.

आतां मोठी संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . $\text{अ} - \text{क्ष} = $ लाहान संख्या .

आणि प्रश्नाप्रमाणें $\text{क्ष}^2 + (\text{अ} - \text{क्ष})^2$ म्हणजे $2\text{क्ष}^2 - 2\text{अक्ष} + \text{अ}^2 = \text{ब}$

आतां अ^2 त्यास स्थलांतर करून $2\text{क्ष}^2 - 2\text{अक्ष} = \text{ब} - \text{अ}^2$

२ त्यांनीं भागून . . . $\text{क्ष}^2 - \text{अक्ष} = \frac{\text{ब} - \text{अ}^2}{2}$

वर्ग पुरा करून . . $\text{क्ष}^2 - \text{अक्ष} + \frac{\text{अ}^2}{4} = \frac{\text{अ}^2}{4} + \frac{\text{ब} - \text{अ}^2}{2}$

वर्गमूळ काढून : $\text{क्ष} - \frac{\text{अ}}{2} = \pm \sqrt{\frac{\text{अ}^2}{4} + \frac{\text{ब} - \text{अ}^2}{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\text{ब} - \text{अ}^2}$

$\frac{\text{अ}}{2}$ त्यास स्थलांतर करून $\text{क्ष} = \frac{\text{अ}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\text{ब} - \text{अ}^2}$

अचेस्थळीं १० आणि बचेस्थळीं ५८ ही त्यांची किंमत लिहून .

$\text{क्ष} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{116 - 100} = 5 + 2 = 7$ ही मोठी संख्या .

तेव्हां $10 - \text{क्ष} = \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{116 - 100} = 5 - 2 = 3$ ही लाहान संख्या .

चौथा , एक तागा २४ रुपयांस विकला . त्यांत जशी १०० रुपयांस मूळ किंमत तशाप्रमाणानें मूळ किमतीस नफा , तेव्हां मूळ किंमत काय ती सांग .

आतां मूळ किंमत अव्यक्त , ती दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर . . . $24 - \text{क्ष} = $ सर्व नफा .

प्रश्नाप्रमाणें . . $100 : \text{क्ष} :: \text{क्ष} : 24 - \text{क्ष}$.

तर . . . $\text{क्ष}^2 = 100(24 - \text{क्ष}) = 2400 - 100\text{क्ष}$

100क्ष त्यास स्थलांतर करून $\text{क्ष}^2 + 100\text{क्ष} = 2400$

वर्ग पुरा करून . . $\text{क्ष}^{२} + १०० \text{क्ष} + २५०० = २४०० + २५०० = ४९००$

वर्गमूळ काढून . . $\text{क्ष} + ५० = \sqrt{४९००} = ७०$

५० त्यांस स्वकांतर करून $\text{क्ष} = ७० - ५० = २०$ मूळकिंमत, हें उत्तर.

पांचवा, एके मेंढक्यानें ८० रुपयांस कांहीं मेंढे विकत घेतले, त्यांत चार मेंढे अधिक आले असते तर दरमेंढयास एकेक रुपया कमी पडता, तेव्हां सर्व मेंढे किती घेतले ते सांग.

अव्यक्त मेंढयांची संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . $\frac{८०}{\text{क्ष}}$ हें एकेकाचें मोल होईल.

आणि जर $\text{क्ष}+४$ मेंढे ८० रुपयांस येते तर प्रत्येकाचें मोल $\frac{८०}{\text{क्ष}+४}$

प्रश्नाप्रमाणें . . $\frac{८०}{\text{क्ष}} = \frac{८०}{\text{क्ष}+४} + १$

क्षनें गुणून . . $८० = \frac{८०\text{क्ष}}{\text{क्ष}+४} + \text{क्ष}$

$\text{क्ष}+४$ त्यांनीं गुणून $८० \text{क्ष} + ३२० = ८० \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + ४ \text{क्ष}$.

८०क्ष दोन बाजूंतून टाकून $\text{क्ष}^{२} + ४ \text{क्ष} = ३२०$

वर्ग पुरा करून . . $\text{क्ष}^{२} + ४ \text{क्ष} + ४ = ३२४$

वर्गमूळ काढून . . . $\text{क्ष} + २ = १८$

२ त्यांस स्वकांतर करून $\text{क्ष} = १८ - २ = १६$ मेंढयांची संख्या हें उत्तर.

साहावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं, त्यांची बेरीज

१३ (अ) आणि त्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ४७२१ (ब) होई ल.

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर $\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}क्ष$ म्हणजे $\frac{अ+क्ष}{२}$ ही मोठी संख्या.

आणि $\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}क्ष$ म्हणजे $\frac{अ-क्ष}{२}$ ही लाहान संख्या आहे

आतां प्रश्नाप्रमाणें $\frac{(अ+क्ष)^४}{१६} + \frac{(अ-क्ष)^४}{१६} = ब$

१६ त्यांनीं गुणून $(अ+क्ष)^४ + (अ-क्ष)^४ = १६ब$

घात करून त्यांची बेरीज $२अ^४ + १२अ^२क्ष^२ + २क्ष^४ = १६ब$

स्थ० आणि दोन त्यांनीं भागून $क्ष^४ + ६अ^२क्ष^२ = ८ब - अ^४$

वर्ग पुरा करून $क्ष^४ + ६अ^२क्ष^२ + ९अ^४ = ८ब + ८अ^४ = ८(ब+अ^४)$

मूळ काढून . . . . $क्ष^२ + ३अ^२ = \sqrt{८(ब+अ^४)}$

३अ^२ त्यांस स्थलांतर करून $क्ष^२ = \sqrt{८(ब+अ^४)} - ३अ^२$

पुनः वर्गमूळ काढून $क्ष = \sqrt{\sqrt{८(ब+अ^४)} - ३अ^२}$

आतां त्यांत अची किंमत १३ आणि बची ४७२१ ही लिहून $क्ष = \sqrt{\sqrt{८(४७२१+२८५६१)} - ५०७}$

$= \sqrt{५१६ - ५०७}$

$= \sqrt{९}$

$= ३$ ही क्षची किंमत म्हणजे दोन संख्यांची वजाबा-

की तर $\frac{अ+स}{२} = \frac{१३+३}{२} = \frac{१६}{२} = ८$ ही मोठी संख्या.
आणि $\frac{अ-स}{२} = \frac{१३-३}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ ही लाहान संख्या त्यांची बेरीज ८+५=१३ आणि $८^४ + ५^४ = ४७२१$ हें उत्तर.

सातवा, ती संख्या काय आहे. कीं, जिचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होतात.

उत्तर, ६

आठवा, दोन संख्या काढ अशा कीं, त्यांतील लाहान संख्या मोठे संख्येस होईल. जशी मोठी संख्या बारास होईल. आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ होते.

उत्तर, ३ आणि ६

नववा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांची वजाबाकी २ आहे, आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ९८ आहे.

उत्तर, ३ आणि ५,

दाहावा, त्या दोन संख्या काय आहेत. कीं, ज्यांची बेरीज ६ होते, आणि ज्यांचे घनांची बेरीज ७२ होते.

उत्तर, २ आणि ४

अकरावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचा गुणाकार २० आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ६१ आहे.

उत्तर . ४ आणि ५

बारावा, ११ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं त्या दोन भागांचे वर्गांचा गुणाकार ७८४ होईल.

उत्तर, ४ आणि ७

तेरावा. ५ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असेकीं, ते दोन भाग परस्परानें वेगळाले भागिले असतां त्या दोन भागाकारांची बेरीज ४ $\frac{१}{४}$ होईल.

उत्तर, १ आणि ४

चौदावा. १२ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं, त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजाबाकीचे आठपट होईल.

उत्तर, ४ आणि ८

पंधरावा, १० त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं लाहान भागाचे चौपटीचा वर्ग मोठे भागाचे दुपटीचे वर्गाहून ११२ त्यांनीं अधिक होईल

उत्तर, ४ आणि ६

सोळावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ८९, आणि ज्यांची बेरीज त्यांतील मोठे संख्येनें गुणिली असतां १०४ होतात.

उत्तर, ५, आणि ८

सत्रावा, ती संख्या काय आहे, कीं ज्या संख्येचे अंकरूप-आकृतींतील दोन मूळ अंकांचे गुणाकारानें जी भागिली असतां भागाकार ५३ येतो, आणि त्या संख्येंतून ९ वजा केले तर बाकींत त्या संख्येंतील मूळ अंकांची व्युत्क्रमस्थिति होते.

उत्तर, ३२

अठरावा, २० ह्या संख्येचे तीन भाग कर, असे कीं, त्या तीन भागांचा गुणाकार २७० होईल, तसें प्रथम आणि दुसरा त्या दोन भागांची वजाबाकी, दुसरा आणि तिसरा त्यांचे वजाबाकीहून २ ह्या संख्येनें उणी असेल.

. उत्तर, ५, ६, आणि ९

एकुणिसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ५६ आणि प्रथम संख्येची तिपट, दुसरे संख्येची दुपट, आणि तिसरे संख्येची तिपट, त्यांची बेरीज ३१ होते

उत्तर, २, ४, आणि ६

विसावा, १३ त्या संख्येचे तीन भाग कर, असे कीं ज्यांचे वर्गांचें उत्तर बराबर असेल, आणि त्या वर्गांची बेरीज ७५ होईल.

उत्तर, १, ५, आणि ७

एकविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ अशा कीं, ज्यांचें उत्तर बराबर, तसें ज्यांची बेरीज ११ आणि ज्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ९६२ होईल.

उत्तर, २, ४, आणि ५

बाविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अशाकीं, ज्यांचें उत्तर बराबर, आणि त्यांतील लाहान संख्येचा वर्ग मोठे दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां २८ होतील, आणि अति मोठे संख्येचा वर्ग लाहान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला तर ४४ होतील.

उत्तर, २, ४, आणि ६

तेविसावा, अ, ब, क त्या तिघांजणांनीं व्यापारांत १४४४ रुपये नफा मिळविला, त्यांत जर बचा नफा अचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९२० रुपये होतात, परंतु कचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९१२ रुपये होतात, तेव्हां त्या त्रिवर्गांत एकेकाचा नफा किती किती रुपये तो सांग.

उत्तर, अचा ४००, बचा ९००, कचा १४४.

चोविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अ-

शाकीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ९२ , आणि त्या संख्या ३,४,५ त्यांनीं अनुक्रमें गुणिल्या असतां त्या तीन गुणाकारांची बेरीज ६६ होईल .

उत्तर , २ , ५, आणि ८

पंचविसावा , दोन संख्या काढ , अशाकीं ज्यांचा गुणाकार आणि ज्यांची बेरीज हीं मिळून ४७ होतात, आणि ज्यांची बेरीज ज्यांचे वर्गांचे बेरिजेंतून वजा केली तर ६२ बाकी राहातील .

उत्तरं , ५ आणि ७

घनादि समीकरण पृथक्करण

घनसमीकरण अथवा तिसरे घाताचें समीकरण तेंच होय , कीं ज्यांत अव्यक्तपदाचा तिसरा घात येतो.

जसें , $\text{क्ष}^3 - \text{अक्ष}^2 + \text{बक्ष} = \text{क}$

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय , कीं ज्यांत अव्यक्तपदाचा चतुर्घात येतो. जसें, $\text{क्ष}^4 - \text{अक्ष}^3 + \text{बक्ष}^2 - \text{कक्ष} = \text{ड}$

पंचघातसमीकरण तेंच होय , कीं ज्यांत अव्यक्तपदाचा पंचघात येतो . जसें, $\text{क्ष}^5 - \text{अक्ष}^4 + \text{बक्ष}^3 - \text{कक्ष}^2 + \text{डक्ष} = \text{ई}$

इत्यादि . पुढें त्याप्रमाणें षड्घातादि समीकरणें जाणावीं, परंतु सर्वांत सर्व घात किंवा पदें जीं समीकरणांत येतात, तीं करणी वांचून असावीं.

घनादि समीकरण पृथक्करणाच्या सामान्य रीति बहुत आहेत, परंतु त्या अतिलांबट म्हणून ही सोपी थोडक्यांत करायाची रीति पुढें सांगतों त्या रीतीवरून घनादिसमीकरण पृथक्करण स्वल्पांत आणि सत्वर होईल

रीति

१ गणिताचा तपशील करून दोन संख्या काढाव्या ज्या मुळाचे जवळ जवळ येतील. आणि त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्तपदस्थळीं वेगळाल्या ठेवाव्या. नंतर हीं संख्यापदें त्यांचे वेगळाले चिन्हांनीं एकत्र करावीं आणि समीकरणाची सांगितली किंमत व्यक्त पद तें त्याहून अधिक किंवा उणें अंतर आहे त्या प्रमाणें धन (+) किंवा ऋण (-) चिन्हानें तें अंतर युक्त करावें.

२ वरप्रमाणें काढिलेले दोन संख्यांची वजावाकी वरच्या दोन अंतरांतून एकानें गुणावी, आणि गुणाकार येईल तो, जर दोन अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत तर त्यांचे वजावाकीनें भागावा, आणि जर तीं विरूप आहेत तर त्यांचे बेरि-

जेनें भागावा, किंवा त्या रीतीनें प्रमाणराशि कराव्या. जशी दोन अंतरांची वजाबाकी किंवा बेरीज काढिले दोन संख्यांचे वजाबाकीस आहे. तसें कोणतेंही अंतर त्याचे संख्येचे हद्दीस होईल.

३ ज्या अंतरानें गुणून शेवटील भागाकार आला, तो त्या अंतराचे संख्येंत मिळवावा. जर ती संख्या समीकरणाचे सांगितले संख्येहून उणी आहे. आणि अधिक आहे तर तो भागाकार त्यांतून वजा करावा. म्हणजे त्या दोन रीतींकरून इच्छिले मुळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल.

४ हें मूळ आणि पूर्वी मुळाजवळ जवळ दोन संख्या काढिल्या आहेत त्यांतून अथवा दुसरी कोणती ही संख्या जी त्याहून मुळाजवळ आहे. ती घेऊन पूर्वप्रमाणें पुनः करावें. म्हणजे दुसरें मूळ निघेल. तें असें कीं, पूर्वापेक्षां अधिक जवळ. त्याप्रमाणें पुनःपुनः करीत जावें. म्हणजे अतिच मुळाजवळ जवळ संख्या निघत जाईल.

प्रथमटीप, दोन संख्या घेणें त्या अशा घ्याव्या कीं, ज्यांची वजाबाकी उजवेकडे शेवटीं १ राहील. कारण ही बाकी वर सांगितल्याप्रमाणें गुणक १ हा अंक होईल. आणि पृथक्करण करिते समयीं लाहान अंतर कामांत घ्यावयास

योग्य आहे.

दुसरीटीप, गणिताचा तपशील करितेसमयीं मूळांक तपासावे. दोन संख्या घेणें त्यांत एक किंमतीहून उणी आणि एक अधिक. त्यारीतीनें दोन मूळांक घेऊन त्यांपासून शुद्ध करायास एकच अंक काढावा. नंतर तें शुद्ध पदें अव्यक्तस्थळीं ठेवून काम चालवावें. सांगितले संख्येहून उणे अंक झाले तर पुनः त्याहून अधिक दुसरी संख्या घेऊन पूर्ववत् करावें. कदाचित् सांगितले संख्येहून अधिक झाले तर त्याचे उलट दुसरी संख्या त्याहून उणी घेऊन पूर्ववत् करावें. त्या दोन संख्या घेऊन गणित करितेसमयीं भागाकार असा घ्यावा कीं, शुद्ध पदसंख्येंत चार अंक येतील. नंतर ही चार अंकस्थानांची संख्या घेऊन त्यांत १ अधिक किंवा उणा वर सांगितल्याप्रमाणें करून पूर्ववत् करावें. आणि त्या गणितांत शुद्धसंख्येंत अंकस्थानें आठपर्यंत काढावीं. कारण प्रतिगणितपर्यायांत पूर्वपूर्वांपेक्षां उत्तरोत्तर अंकस्थानें दुपट होतात. तेव्हां दुपटीपेक्षां अधिकांचा भरवंसा नाहीं. आणि त्याप्रमाणें पुनःपुनः गणितपर्याय केल्यानें उत्तरोत्तर खरे मुळाजवळ जवळ येईल.

उदाहरणें

पहिलें, $\text{क्ष}^{३}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}=१००$ त्या घन समीकरणाचें मूळ किंवा क्षची किंमत काढ.

आतां सत्वर कळतें कीं, क्षची किंमत ४ अथवा ५ त्यांचे मध्यें आहे.

त्याजकरितां त्या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे. तर पृथक्करण त्याप्रमाणें होतें.

प्रथमसंख्या	अव्यक्त	दु॰संख्या
४	क्ष	५
१६	$\text{क्ष}^{२}$	२५
६४	$\text{क्ष}^{३}$	१२५
८४	बेरीज	१५५
१००	सांगितली किंमत	१००
−१६	अंतरें	+५५

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज.

पुनः ४·२ आणि ४·३ त्या दोन संख्या खरीं मूळें जाणून घे.

प्र॰सं॰	अव्यक्त	दु॰संख्या
४·२	क्ष	४·३
१७·६४	$\text{क्ष}^{२}$	१८·४९
७४·०८८	$\text{क्ष}^{३}$	७९·५०७
९५·९२८	बेरीज	१०२·२९७
१००	सांगितली किंमत	१००
−४·०७२	अंतरें	+२·२९७

६·३६९ ही दोन अंतरांची बेरीज.

जसें ७१:१::१६:२ त्याजकरितां क्ष=४·२ हें जवळ जवळ	जशी ६·३६१:१::२·२१७:०·०३६ ही ४·२ त्यांतून वजा करून क्ष=४·२६४ हें जवळजवळ आहे.

पुनः ४·२६४ आणि ४·२६५ त्या दोन संख्या घेऊन पृथ-करण त्याप्रमाणें होतें.

प्रथमसंख्या . . .	अव्यक्त . . .	दुस॰ संख्या.
४·२६४	क्ष	४·२६५
१८·१८१६९६	$क्ष^2$	१८·१९०२२५
७७·५२६७५२	$क्ष^3$	७७·५८१३१०
९९·९७२४४८	बेरीज	१००·०३६५३५
१०० . . .	सांगितलीसंख्या.	१००
−०·०२७५५२	अंतरें	+०·०३६५३५
·०६४०८७ .	ही दोन अंतरांची बेरीज.	

जसें ·०६४०८७ : ·००१ : : ०·०२७५५२ : ०·०००४२९९ हें ला-हानसंख्येस मिळवून क्ष=४·२६४४२९९ हें जवळजवळ आहे.

त्या गणितपर्यायांत चांगलें समजावें म्हणून उघड क-रून लिहिलें. नाहींतर वर्गमूलादि कोष्टकांचे साहाय्यानें त्या-हून सत्वर आणि अति थोडक्यांत होईल.

दुसरें, क्ष³-१५ क्ष²+६३ क्ष=५० त्या समीकरणाचें घनमूळ अथवा क्षची किंमत काढ.

त्यांत सत्वर कळतें कीं, क्षची किंमत १ त्याहून कांहीं अधिक आहे.

त्याजकरितां १·० आणि १·१ त्या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे, तर पृथक्करण त्याप्रमाणें होतें.

प्रथमसंख्या	अव्यक्त	दु०संख्या
१·०	क्ष	१·१
+६३·०	६३क्ष	६९·३
-१५	-१५क्ष²	-१८·१५
१	क्ष³	१·३३१
४९	बेरीज	५२·४८१
५०	सांगितलीकिंमत	५०
-१	अंतरें	+२·४८१

त्या अंतरांची बेरीज ३·४८१

जसें ३·४८१ : ·१ : : १ : ·०२.

तर क्ष=१·०२ हें जवळजवळ आहे.

पुनः १·०३ आणि १·०२

दु०सं०	अव्यक्त	प्र०संख्या
१·०३	क्ष	१·०२
६४·८९	६३क्ष	६४·२६
-१५·९१३५	-१५क्ष²	-१५·६०६०
१·०९२७२७	क्ष³	१·०६१२०८
५०·०६९२२७	बेरीज	४९·७१५२०८
५०	सांगितलीकिंमत	५०
+·०६९२२७	अंतरें	-·२८४७९२

त्या अंतरांची बेरीज ·३५४०१९

जसें ·३५४०१९ : ·०१ : : ·०६९२२७ : ·००१९५५

तर क्ष=१·०३-·००१९५५ म्हणजे क्ष=१·०२८०४ हें जवळजवळ आहे.

तिसरी टीप. त्यावेळेस पूर्वी लिहिलें आहे त्याचें स्मरण करावें, कीं प्रतिसमीकरणास तितकीं मुळें आहेत; कीं त्यांत जितक्या घातपरंपरा येतात- अथवा तितकीं मुळें आहेत, कीं समीकरणांत अव्यक्तपदाचा सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक जितक्या किंमतीचा आहे. म्हणजे एकवर्णसमीकरणांत मूळ किंवा मुळाची किंमत एकच आहे. परंतु वर्गसमीकरणांत मुळें किंवा त्यांच्या किमती दोन आहेत. घनसमीकरणांत तीन, चतुर्घातसमीकरणांत चार, इत्यादि.

आणि जेव्हां कोणतेही समीकरणाचें एक मूळ संनिधरीतीप्रमाणें निघालें, तेव्हां राहिलीं मुळें किंवा त्यांच्या किंमती त्या पुढील रीतीकरून काढितां येतात. आतां भाज्य भाजक असावे. त्यांत भाज्याकरितां व्यक्त संख्येस चिन्ह बदल करून अव्यक्त बाजूस स्थळांतर करावें, म्हणजे तो भाज्य झाला. आणि भाजकाकरितां क्ष-उणें पूर्वी काढिलेलें जवळजवळचें मूळ, म्हणजे हा भाजक झाला. नंतर त्या भाजकानें तो भाज्य भागून जो भाकाकार येईल तो एक नवें दुसरें समीकरण होईल. ज्यांत सांगितले समीकरणाहून एक घात कमी येईल.

त्या नवे समीकरणाचें मूळ पूर्व संनिधरीतीनें काढावें. म्हणजे सांगितले समीकरणाचें दुसरें मूळ निघेल. नंतर त्या

दुसरे मुळानें पूर्वप्रमाणें दुसरे समीकरणाहून एक घात कमी असें तिसरें नवें समीकरण करावें. नंतर त्या तिसरे नवे समीकरणाचें मूळ पूर्व जवळचे रीतीनें काढावें. ती सांगितले समीकरणमूळाची तिसरी किंमत होईल. त्याप्रमाणें वर्गसमीकरण होईपर्यंत नवें नवें समीकरण करीत जावें. तें झाल्यानंतर वर्गसमीकरणरीतीनें वर्ग पुरा करून त्याचीं पूर्ववत् दोन मुळें निघतील – त्या रीती करून सर्व मुळें कळतील.

जसें वरचे उदाहरणांचे समीकरणांत एक मूळ काढिलें तें १.०२८०४ आहे. तर त्यास ऋण चिन्ह आणि क्ष जोडून भाजक झाला.

भाजक भाज्य भागाकार.

$\text{क्ष}-१.०२८०४)\text{क्ष}^{३}-१५\text{क्ष}^{२}+६३\text{क्ष}-५०(\text{क्ष}^{२}-१३.९७१९६\text{क्ष}+४८.६३६२७$

हें दुसरें नवें समीकरण झालें. आतां वर सांगितल्याप्रमाणें कळतें कीं, हें वर्गसमीकरण त्या रूपाचें आहे.

$$\text{क्ष}^{२}-१३.९७१९६\text{क्ष}=-४८.६३६२७$$

त्यांत वर्ग पुरा करून क्षच्या दोन किंमती त्या आहेत. जे ६.५७६५३ आणि ७.३९५४२ आतां त्या दोन सांगितले घनाचे मुळाच्या राहिल्या दोन किंमती आहेत. म्हणजे $\text{क्ष}^{३}-१५\text{क्ष}^{२}+६३\text{क्ष}=५०$ त्या समीकरणाचीं तीन मुळें हीं आहे-

प्रथममूळ	१·०२८०४	
दुसरें मूळ	६·५७६५३	
तिसरें मूळ	७·३९५४३	
बेरीज	१५·०००००	

त. आणि सर्व मुळांची बेरीज बराबर १५ म्हणजे ही बेरीज सांगितल्ले घनसमीकरणांतील दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचे बराबर आहे आणि म्हणूनच हीं तीन मुळें शुद्ध आहेत. नाहीं तर अशुद्ध होतीं.

चौथी टीप. त्या वरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे. जे इतर रीतीकरून पृथक्करण करून किंमत काढायास त्या समीकरणास एक रूप द्यावें लागतें. तसें त्या रीतींत नाहीं. कारण कीं, ही रीति समीकरणाचें जें रूप आहे त्याजवरच लागते त्या समीकरणांत कधीं ही करणीपदें किंवा संयुक्त पदें असोत. जसें त्या पुढील उदाहरणांत.

तिसरें, $\sqrt{\text{१४४क्ष}^2-(\text{क्ष}^2+\text{२०})^2}+\sqrt{\text{१९६क्ष}^2-(\text{क्ष}^2+\text{२४})^2}=$ ११४ त्या समीकरणाचें मूळ किंवा क्षची किंमत काढ.

कांहीं तपाशिल्यावर सत्वर कळतें कीं, क्षची किंमत ७ त्याहून कांहीं अधिक आहे. तर प्रथम संख्या क्ष=७ आणि दुसरी संख्या क्ष=८ त्या दोन संख्या खच्या जाणून घे.

प्रथम संख्या क्ष=७		दुसरी संख्या क्ष=८
४७·९०६	$\sqrt{\text{११४क्ष}^2-(\text{क्ष}^2+\text{२०})^2}$	४६·४७५

६५·२८४ . . .	$\sqrt{१२६क्ष^2-(क्ष^2+२४)^2}$ . . .	६९·२८१
११२·२९० . . .	बेरीज . . .	११५·७५९
११४ . . .	सांगितली किंमत	११४
−·७१०	अंतरें	+१·७५९

+१·७५९

जसें २४६९ : १ : : ·७१० : ·०२ हें जवळ जवळ

त्याजकरितां ∴ क्ष = ७·०/१·२ हें जवळ जवळ

ही संख्या अधिक आहे त्याजकरितां त्याहून उणी ७·१

ही घेऊन पुनः क्ष = ७·२ क्ष = ७·१

४७·९९०	$\sqrt{११४क्ष^2-(क्ष^2+२०)^2}$	४७·९७१
६६·४०२	$\sqrt{१२६क्ष^2-(क्ष^2+२४)^2}$	६५·९०४
११४·३९१	बेरीज	११३·८७७
११४	सांगितली किंमत	११४
+·३९१	अंतरें	−·१२३

−·१२३

जसें ५१५ : ·१ : : ·१२३ ०२४

७·१

त्याजकरितां . . . . क्ष = ७·१२४ हें जव

ळ जवळ .

पांचवीटीप, ही रीति समीकरणाचें कसेंही विकट रूप असेल तरी त्याजवर लागते. आणि ही रीति प्रकाशक समीकरणपृथक्करणावरही लागते.

प्रकाशक समीकरण म्हणजे अव्यक्ताचा घात प्रकाशक ही अव्यक्त आहे तें होय. जसें त्यां पुढील उदाहरणांत.

चौथें उदाहरण, $क्ष^{क्ष}=१००$ ह्या समीकरणांत क्षची किंमत काय?

ह्या जातीचे समीकरणाचें पृथक्करण सत्वर करावयास हें उपयोगी आहे कीं, समीकरणाचें लागरतंम काढून लागरतंमकोष्टकांचे साहाय्यानें पदांच्या वेगळाल्या किंमती लिहाव्या.

जसें त्या समीकरणांत दोन बाजूंचें लागरतंम हें आहे. क्ष × क्ष. लाग० = २ हें १००.चें लागरतंम आहे. नंतर तपाशिल्यापासून लवकर समजतें कीं, क्षची किंमत ३ आणि ४ त्या दोन संख्यांचे आंत मध्याचे जवळ, परंतु ३ त्या संख्येपासून दूर आणि ४ त्या संख्येचे जवळ. त्याजकरितां क्ष = ३.५ आणि क्ष = ३.६ त्या दोन संख्या घे. आणि लागरतमानें तपशील करिता त्याप्रमाणें होईल.

प्रथम क्ष = ३·५

३·५ त्याचा लाग = ०·५४४०६८

नंतर ३·५ × ३·५ चा लाग = १·९०४२३८

खरा लागर = २·०००००००

− ·०९५७६२ अंतरें

दुसरी क्ष = ३·६

३·६ त्याचा लाग = ०·५५६३०२

नंतर ३·६ × ३·६ चा लाग = २·००२६९१

खरा लागर = २·००००००

\+ ·००२६९१

·००२६९१

०९८४५३ अंतरांची बेरीज

जसें ·०९८४५३ : ·१ : : ·००२६९१ : ·००२७३ ही दुसरे संख्येची वृद्धि.

बाकी $\frac{३·६}{३·५९७२७}$ = क्ष हें जवळ जवळ.

पुनः तपासून कळतें कीं, हें थोडें कमी आहे. त्याजकरितां क्ष = ३·५९७२७ आणि क्ष = ३·५९७२८ त्या दोन संख्या घे. आणि लागरतंमानें तपशील करितां त्याप्रमाणें होईल.

प्रथम क्ष ३·५९७२७

३·५९७२७ त्याचा लाग = ०·५५५९७३ हें

३·५९७२७ × … ३·५९७२७ चा लाग० } = १·९९९९८५४

खरा लाग० = २·०००००००

− ०·००००१४६ अंतरें

दुसरी क्ष = ३·५९७२८

३·५९७२८ त्याचा लाग = ०·५५५९७४

३·५९७२८ × … ३·५९७२८ चा लाग० } = ०·९९९९९९२

खरा लाग = २·००००००

− ०·००००५७

—०·०००००४७

०·००००००९९ ही अंतरांची वजाबाकी, तर

जसें ०·००००००९९ : ·००००१ : : ·०००००४७ : ०·००००००४७४७४७ दु-

सरे संख्येचे शरदीस. $\frac{३५९९७२८००००००}{३·५९९७२८४७४७४७}$ ही

बेरीज क्षचे किंमतीजवळजवळ.

पांचवें, $क्ष^{३} + १० क्ष^{२} + ५ क्ष = २६०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ४·११७९८५७$

साहावें, $क्ष^{३} - २ क्ष = ५०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ३·८६४८८५४$

सातवें, $क्ष^{३} + २ क्ष^{२} - २३ क्ष = ७०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = ५·१३४५७$

आठवें, $क्ष^{३} - १७ क्ष^{२} + ५४ क्ष = ३५०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे?

उत्तर, $क्ष = १४·९५४०७$

नववें, $क्ष^{४} - २ क्ष^{३} - ७५ क्ष = १००००$ त्या समीकरणां

त क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर क्ष=१०.२८४७२४

दाहावें, $२क्ष^{४} - १६क्ष^{३} + ४०क्ष^{२} - ३०क्ष = -१$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=१.२८४७२४

अकरावें, $क्ष^{५} + २क्ष^{४} + ३क्ष^{३} + ४क्ष^{२} + ५क्ष = ५४३२१$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=८.४१४४५५

बारावें, $क्ष^{क्ष} = १२३४५६७८९$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=८.६४००२६८

तेरावें, $२क्ष^{४} - ७क्ष^{३} + ११क्ष^{२} - २क्ष = ११$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

चौदावें, $(३क्ष^{२} - २\sqrt{क्ष} + १)^{\frac{३}{२}} - (क्ष^{२} - ४क्ष\sqrt{क्ष} + २\sqrt{क्ष})^{\frac{३}{२}} = ५६$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=१८.३६०८७७

घनसमीकरणपृथक्करणकरायाची कार्डानाची

रीति

इष्टराशिसाधनाचे साहाय्यानें घनादिसमीकरणाचें मूळसंख्येंत काढायास पूर्व सामान्यरीति फार उपयोगी आणि सोपी आहे; परंतु घनसमीकरणाचेंच मूळ काढायास कार्डानानें विशेष रीति दुसरी केली आहे, ती त्या स्थळीं लिहितों. कारण, कदाचित् कोणी त्या रीतीवरून काम करायास इच्छील तरीं चिंता नाहीं.

त्या रीतीनें पृथक्करण करणें तर घनसमीकरणास अगत्य जें रूप पाहिजे तें हें होय. म्हणजे, $झ^3$ * अझ = ब म्हणजे दुसरें पद किंवा दुसरे घाताचें पद त्यांत नसावें. त्याजकरितां कोणतेही घनसमीकरणास त्याचें रूप दिल्या नंतर जसें $क्ष^3 + पक्ष^2 + कक्ष = र$. म्हणजे ज्याचे प्रथम पदास वेळाप्रकाशक नाहीं असें. तर दुसरें पद $पक्ष^2$ हें तेथून घालविलें पाहिजे. त्याची रीति $\frac{१}{३}$प अथवा दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचा $\frac{१}{३}$ घेऊन त्यास चिन्ह बदल करावें आणि कोणतेही दुसरे अव्यक्ताशीं जोडावें. जसें झ, तर त्याप्रमाणें होईल. झ$-\frac{१}{३}$प नंतर सांगितले समीकरणांत अव्यक्त क्षचे स्थळीं ठेवावें. म्हणजे एक नवें त्यापुढील सं-

क्षेपरूपाचें समीकरण उत्पन्न होईल . $\text{ज्ञ}^{३}$ * अज्ञ=ब हें रूप कार्डानाचे रीतीनें पृथक्करण करायास अगत्य पाहिजे. आतां त्यांत क=$\frac{१}{३}$अ आणि ड=$\frac{१}{२}$ब असे असतील तर संक्षेपसमीकरणास हें पूर्वीचें रूप होईल . $\text{ज्ञ}^{३}$ *३क ज्ञ= २ड .

नंतर क आणि ड ह्यांच्या दोन किमती ह्या पुढील सारणीकोष्टकांत ठेवाव्या .

$$\left.\begin{array}{l} \text{ज्ञ}=\sqrt[३]{\text{ड}+\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}} + \sqrt[३]{\text{ड}-\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}} \\ \qquad\qquad \text{अथवा} \\ \text{ज्ञ}=\sqrt[३]{\text{ड}+\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}} - \dfrac{\text{क}}{\sqrt[३]{\text{ड}+\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}}} \end{array}\right\} *$$

---

* मनांत आणकीं , कोणतेंही मूळ दोन भागांचें आहे . म्हणजे क्ष आणि य. आतां क्ष + य = ज्ञ ही बेरीज सांगितले समीकरणांत ज्ञाचे स्थळीं ठेवावी म्हणजे त्यांचें हें रूप होईल .

$\text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३}+३\text{क्षय}(\text{क्ष}+\text{य})+\text{अ}(\text{क्ष}+\text{य})=\text{ब}$

पुन: मनांत आणकीं , ३क्षय=−अ. आतां पूर्वसमीकरणांत ३क्षय यांचे स्थळीं −अ ठेविल्यानें त्या समीकरणाचें हें रूप होईल . $\text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३}=\text{ब}$ आतां या समीकरणाचे वर्गांतून हें समीकरण म्हणजे क्षय=−$\frac{१}{३}$अ याची चौपट वजा केली म्हणजे ही बाकी राहाते. $\text{क्ष}^{६}-२\text{क्ष}^{३}\text{य}^{३}+\text{य}^{६}=\text{ब}^{२}+\frac{४}{२७}\text{अ}^{३}$ नंतर याचें वर्गमूळ हें आहे . $\text{क्ष}^{३}-\text{य}^{३}=\sqrt{(\text{ब}^{२}+\frac{४}{२७}\text{अ}^{३})}$ हें समीकरण $\text{क्ष}^{३}+\text{य}^{३}=\text{ब}$ ह्या पूर्वसमीकरणांत मिळवून आणि परस्परांची वजाबाकी करून हीं दोन समीकरणें उत्पन्न होतात .

म्हणजे झ मुळाची किंमत $झ^3 + अझ = ब$ त्या संक्षेप समीकरणांत निघेल . शेवटीं $क्ष = झ - \frac{1}{3}प$ घे : तर ही क्ष-ची किंमत $क्ष^3 + पक्ष^2 + फक्ष = र$ त्या समीकरणांत दिलेलें मूळ होईल .

त्याप्रमाणें सांगितले समीकरणाचें एक मूळ निघाल्यानं
पृष्ठ २३८ तर सांगितलें समीकरण पूर्वरीतीनें एक घात कमी करून वर्गसमीकरण उत्पन्न होईल . त्याचे वर्गपूरणरीतीनें राहिलीं दोन मुळें उत्पन्न होतील .

टीप . जेव्हां अ किंवा क हा वेळाप्रकाशक ऋण

$$\begin{cases} 2क्ष^3 = ब + \sqrt{ब^2 + \frac{4}{27}अ^3} = ब + 2\sqrt{(\frac{1}{2}ब)^2 + (\frac{1}{3}अ)^3} \\ 2य^3 = ब - \sqrt{ब^2 + \frac{4}{27}अ^3} = ब + 2\sqrt{(\frac{1}{2}ब)^2 + (\frac{1}{3}अ)^3} \end{cases}$$ अथवा

$$\begin{cases} 2क्ष^3 = 2ड + 2\sqrt{(ड^2 + क^3)} \\ 2य^3 = 2ड - 2\sqrt{(ड^2 + क^3)} \end{cases}$$ २ दोन यांनीं भागून घनमूळ घेऊन

$$\begin{cases} क्ष = \sqrt[3]{ड + \sqrt{ड^2 + क^3}} \\ य = \sqrt[3]{ड - \sqrt{ड^2 + क^3}} \end{cases}$$ त्या दोहोंची बेरीज वरचे सारणी कोष्टक आहेत . म्हणजे झची किंमत .

आतां वरचे समीकरणांतील दोन दुसरीं पदें समछेद केल्यापासून कळतें कीं , दुसरे सारणी कोष्टक प्रथम सारणी कोष्टकाचे किमती बराबर आहेत .

आहे. आणि $क^3$ घन $ड^2$ वर्गाहून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढायास प्रायशः अशक्य आहे.

उदाहरण, $क्ष^3 - ६क्ष^2 + १०क्ष = ८$ त्या समीकरणाचीं वेगळालीं मुळें काय आहेत?

प्रथम, दुसरें पद घालवावयाकरितां त्याचा वेळा-प्रकाशक −६ आहे. त्याचा तृतीय भाग −२ आहे. त्याजकरितां $क्ष = ज्ञ + २$ हे घे. तर

$$
\begin{aligned}
क्ष^3 &= ज्ञ^3 + ६ज्ञ^2 + १२ज्ञ + ८\\
-६क्ष^2 &= \quad -६ज्ञ^2 - २४ज्ञ - २४\\
+१०क्ष &= \qquad\quad +१०ज्ञ + २०\\
\hline
& ज्ञ^3 \; * \; - २ज्ञ + ४ = ८\\
\text{अथवा} \quad & ज्ञ^3 \; * \; - २ज्ञ = ४
\end{aligned}
$$

त्यांत $अ = -२$ आणि $ब = ४$ त्याजकरितां $क = -\frac{२}{३}$ आणि $ड = २$ त्याजकरितां

$$\sqrt[3]{ड + \sqrt{(ड^2 + क^3)}} = \sqrt[3]{२ + \sqrt{(४ - \frac{८}{२७})}} = \sqrt[3]{२ + \sqrt{\frac{१००}{२७}}} = \sqrt[3]{२ + \frac{१०}{९}\sqrt{३}} = १\cdot५७७३५.$$

$$\text{आणि} \; \sqrt[3]{ड - \sqrt{(ड^2 + क^3)}} = \sqrt[3]{२ - \sqrt{(४ - \frac{८}{२७})}} = \sqrt[3]{२ - \sqrt{\frac{१००}{२७}}} = \sqrt[3]{२ - \frac{१०}{९}\sqrt{३}} = ०\cdot४२२६५.$$

नंतर त्या दोहोंची बेरीज ज्ञची किंमत आहे. म्हणजे $ज्ञ = २$ त्याजकरितां $क्ष = ज्ञ + २ = ४$ हें $क्ष^3 - ६क्ष^2 + १०क्ष = ८$ त्या समीकरणांत क्षचें मूळ आहे.

दुसरीं दोन मुळें काढायाकरितां ६७९ वे पृष्ठावरील रीतीनें भागाकार करावा जसें,

$$क्ष-४ \,)\, क्ष^{3}-६क्ष^{2}+१०क्ष-८ \,(\, क्ष^{2}-२क्ष+२=०$$

$$क्ष^{3}-४क्ष^{2}$$

$$* \; -२क्ष^{2}+१०क्ष$$

$$-२क्ष^{2}+८क्ष$$

$$* \; +२क्ष-८$$

$$+२क्ष-८$$

$$* \quad *$$

आतां स्थलांतरानें $क्ष^{2}-२क्ष=-२$

वर्ग पुरा करून $क्ष^{2}-२क्ष+१=-१$

मूळ काढून $क्ष-१=\pm\sqrt{-१}$

स्थलांतरानें $क्ष=१\pm\sqrt{-१}$

म्हणजे $क्ष=१+\sqrt{-१}$ आणि $क्ष=१-\sqrt{-१}$ हीं क्षचीं इच्छिलीं दोन मुळें होत.

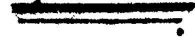
दुसरें, $क्ष^{3}-९क्ष^{2}+२८क्ष=३०$ या समीकरणांत वेगळालीं मुळें काय आहेत?

उत्तर, $क्ष=३$ अथवा $=३+\sqrt{-१}$ अथवा $=३-\sqrt{-१}$

तिसरें, $क्ष^{3}-७क्ष^{2}+१४क्ष=२०$ या समीकरणांत वेग-

झालीं मुळें काय आहेत ?

उत्तर, क्ष=५ अथवा=१+√-३ अथवा=१-√-३



सरळव्याज.

कोणतेही मुदलाचें कितीही मुदतीनें व्याज मुद्दल आणि मुदती यांशीं समप्रमाणांत आहे. त्याजकरितां एक वर्षाचें एक रुपयाचें व्याज कोणतेंही मुद्दल आणि त्याच्या मुदती वर्ष आणि वर्षाचे अवयव हीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज होईल. म्हणजे जर,

र= एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याजाचा दर असेल.

प = मुद्दल कर्ज असेल.

त = मुदतींची संख्या असेल.

अ = व्याज मुद्दल म्हणजे व्याज आणि मुद्दल मिळून राशि असेल.

परत=पचें त मुदतींचे व्याज होईल. त्याजकरितां प+परत अथवा प×(१+रत)=अ ही व्याजमुद्दल राशि.

त्या समीकरणापासून दुसरें समीकरण अल्यायासें उत्पन्न होतें, ज्यापासून दुसरे पदांच्या किंमती समजांत येतील. आणि पुढें सांगतो त्याप्रमाणें त्यांस एकत्र करितो.

प्रथम, **अ = प + परत** हें व्याजमुद्दल.

दुसरें, **प** = $\frac{\text{अ}}{१+\text{रत}}$ हें मुद्दल.

तिसरें, **र** = $\frac{\text{अ}-\text{प}}{\text{पत}}$ हा व्याजाचा दर.

चौथें, **त** = $\frac{\text{अ}-\text{प}}{\text{पर}}$ त्या मुदती.

उदाहरण, कोणतेही सरळ व्याजाचे दरानें कोणतें ही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या?

त्या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे. म्हणजे, **अ = प + परत**. त्यांत **अ = २ प**. म्हणजे, मुद्दलाची दुपट अशे स्थळीं ठेविली पाहिजे. तर **२ प = प + परत**. अथवा, **परत = प**. अथवा, **रत = १** त्याजकरितां **त** = $\frac{१}{\text{र}}$

त्यांत र हें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज आहे. त्याजकरितां सरळ व्याजानें मुद्दल दुपट होण्यास त मुदती भागाकार आहे. जे कोणतेंही मुद्दल त्याचे एक वर्षाचे व्याजानें भागिलें तो भागाकार मुदतीभागाकार होय. अशानें १०० रुपयांस १ वर्षाचें व्याज ५ रुपये असेल, तर मुद्दल दुपट हो-

ण्यास $\frac{१००}{५}$ = २० वर्षें असावीं. अथवा चौथे समीकरणापासून मुदतीं सत्वर कळतील. $त = \frac{अ-प}{पर} = \frac{२प-प}{पर} = \frac{२-१}{र} = \frac{१}{र}$ हें पूर्वप्रमाणें बराबर आहे.

चक्रवाढव्याज.

जीं पदें सरळव्याजांत येतात. म्हणजे,

प = मुद्दल.

र = एक रुपयाचा एक वर्षाचे व्याजाचा दर.

अ = व्याजमुद्दल रास.

त = मुदती.

त्याशिवाय चक्रवाढव्याजांत दुसरें एक पद येतें. म्हणजे व्याजाचे दराचें गुणोत्तर. तें हें आहे कीं, एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याजमुद्दल. हें मुद्दल दाखवायाकरितां च अक्षरचिन्ह घ्यावें. म्हणजे, च = १ + र. हें एक रुपयाचे एक मुदतीचें व्याजमुद्दल दाखवितें. तेव्हां वेगळाले मुदतीचें व्याजमुद्दल त्यारीतीनें तपशील करितां कळतें. जसें,

१ रुपया कोणतेही मुदतीचे व्याजमुद्दलास आहे, तसें-

कोणतेंही सांगितलें मुद्दल – त्या मुदतीचें त्याचें व्याजमुद्दलास होईल. म्हणजे,

जसें १ रुपया : च : : प : पच . हें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे. आणि १ रुपया : $च^{२}$: : पच : $पच^{२}$. हें दुसरे वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे.

तसें १ रुपया : $च^{३}$: : $पच^{२}$: $पच^{३}$. हें तिसरे वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे.

आणि इत्यादि.

त्याजकारितां सामान्यतः $पच^{त} = अ$. हें व्याजमुद्दल त मुदतीचें आहे. त्या समीकरणापासून हें सामान्य समीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम, $अ = पच^{त}$ हें व्याजमुद्दल.

दुसरें, $प = \frac{अ}{च^{त}}$ हें मुद्दल.

तिसरें, $च = \sqrt[त]{\frac{अ}{प}}$ हें गुणोत्तर.

चवथें, $त = \frac{ला\cdot अ - ला\cdot प}{ला\cdot च}$

त्यापासून कोणतेंही एक पद निघेल, जर राहिलीं तीन पदें सांगितलीं आहेत.

जेव्हां सगळें व्याजच करायाची इच्छा आहे, तेव्हां अ

त्या व्याजमुद्दलापासून प हें मुद्दल मात्र वजा करावें. म्हणजे बाकी राहिली तें व्याज.

उदाहरण, कोणतें ही मुद्दल सांगितलें. चक्रवाढव्याजाचे दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या? तर हें समजायाकरितां चवथें समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे. परंतु त्या प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें अ=२प तेव्हां त्याप्रमाणें तपशील होईल.

$$\text{त}=\frac{\text{ला० अ}-\text{ला० प}}{\text{ला० च}}=\frac{\text{ला० २प}-\text{ला० प}}{\text{ला० च}}=\frac{\text{ला० २}}{\text{ला० च}}$$

अशानें जर एक वर्षांत १०० रुपयांस व्याजाचा दर ५ रुपये असेल, तर $\text{च}=१+\cdot०५=१\cdot०५$ त्याजकरितां.

$$\text{त}=\frac{\text{ला० २}}{\text{ला० १}\cdot\text{०५}}=\frac{\cdot३०१०३०}{\cdot०२११८९}=१४\cdot२०६७$$ हें जवळजवळ.

म्हणजे, कोणतेंही मुद्दल १४ दे वर्षांत दुपट होतें, दरशेंकडा दरवर्षास पंचोत्रा व्याज चक्रवाढीनें असेल तर.

त्या प्रश्नापासून आणि सरळ व्याजांत त्यासारिखे प्रश्न आहेत, त्यांपासून वेगळालें मुद्दल दुपट होण्यास सरळ व्याजानें आणि चक्रवाढव्याजानें किती किती मुदती असाव्या तें कळायास कोष्टक लिहितों.

दर		सरळव्याज.	चक्रवाढ व्याज.
२		५०	३५·००२८
२ १/२	शंभरांस एकवर्षास.	४०	२८·०७०१
३	त्या दराचे व्याजानें	३३ १/३	२३·४४९८
३ १/२	एक रुपया किंवा दुसरें	२८ ४/७	२०·१४८८
४	कोणतेंही मुद्दल दुपट	२५	१७·६७३०
४ १/२	होईल. त्या पुढील को	२२ २/९	१५·७४७५
५	ष्टकांत सांगितले वर्षां	२० ०/०	१४·२०६७
६	नीं किंवा मुदतींनीं	१६ २/३	११·८९५७
७		१४ २/७	१०·२४४८
८		१२ १/२	९·००६५
९		११ १/९	८·०४३२
१०		१०	७·२७२५

त्या पुढील कोष्टकांचे साहाय्यानें वेगळाले दरांनीं वेगळाले मुदतींचे चक्रवाढव्याजाचा हिसाब करायास फार सुगम पडेल

एक रुपयाचें व्याजमुद्दल कितीही वर्षांचे संख्येनें

वर्षें	३	३½	४	४½	५	६
१	१·०३०००	१·०३५००	१·०४०००	१·०४५००	१·०५०००	१·०६०००
२	१·०६०९	१·०७१२	१·०८१६	१·०९२०	१·१०२५	१·१२३६
३	१·०९२७	१·१०८७	१·१२४९	१·१४१२	१·१५७६	१·१९१०
४	१·१२५५	१·१४७५	१·१६९९	१·१९२५	१·२१५५	१·२६२५
५	१·१५९३	१·१८७७	१·२१६७	१·२४६२	१·२७६३	१·३३८२
६	१·१९४१	१·२२९३	१·२६५३	१·३०२३	१·३४०१	१·४१८५
७	१·२२९९	१·२७२३	१·३१५९	१·३६०९	१·४०७१	१·५०३६
८	१·२६६८	१·३१६८	१·३६८६	१·४२२१	१·४७७५	१·५९३९
९	१·३०४८	१·३६२९	१·४२३३	१·४८६१	१·५५१३	१·६८९५
१०	१·३४३९	१·४१०६	१·४८०२	१·५५३०	१·६२८९	१·७९०९
११	१·३८४२	१·४६००	१·५३९५	१·६२२९	१·७१०३	१·८९८३
१२	१·४२५८	१·५१११	१·६०१०	१·६९५९	१·७९५९	२·०१२२
१३	१·४६८५	१·५६४०	१·६६५१	१·७७२२	१·८८५६	२·१३२९
१४	१·५१२६	१·६१८७	१·७३१७	१·८५१९	१·९७९९	२·२६०९
१५	१·५५८०	१·६७५३	१·८००९	१·९३५३	२·०७८९	२·३९६६
१६	१·६०४७	१·७३४०	१·८७३०	२·०२२४	२·१८२९	२·५४०४
१७	१·६५२८	१·७९४७	१·९४७९	२·११३४	२·२९२०	२·६९२८
१८	१·७०२४	१·८५७५	२·०२५८	२·२०८५	२·४०६६	२·८५४३
१९	१·७५३५	१·९२२५	२·१०६८	२·३०७९	२·५२७०	३·०२५६
२०	१·८०६१	१·९८९८	२·१९११	२·४११७	२·६५३३	३·२०७१

त्या कोष्टकांत सगळे घात म्हणजे न्वें घात विसावे घा तापर्यंत लिहिले आहेत. किंवा एक रुपयाचें व्याजमुद्दल: त्यांचें काम हें आहे. कीं, कोणतेही मुद्दलाचें व्याज किंवा व्याजमुद्दल कोणतेही मुदतीचें करायाचें, जी मुदत वीस व र्षांचे आंत आहे.

उदाहरण, ५२३० रुपये मुद्दल त्यास दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजप्रमाणें १५ वर्षांत चक्रवाढीनें व्याजमुद्दल रास किती होईल?

कोष्टकांत १५ वे ओळींत ५ त्यांचें दराखालीं एक रुपयाचें व्याजमुद्दल लिहिलें आहे. तें २.०७८९ त्यास सांगितले मुद्दलानें गुणून.

```
        ५२३०
     --------
      ६२३६७०
    ४१५७६
  १०३९४५
  ----------
  १०८७२.६४७० हें व्याजमुद्दलरुपयेरास
         ४
     ------
     २.५८८०
```

किंवा रु. १०८७२ . . . पा. २ . . . रे. ५८ हें व्याजमुद्दल.

५२३०
____
५६४२ . . . २ . . . ५८ हें व्याज.

प्रथमटीप जेव्हां व्याजाचा दर वर्षाचे कांहीं भागावर आहे जसें, अर्धवर्ष, पाववर्ष, इत्यादि. तेव्हां पण हीच रीति लागते, परंतु असें आहे. तर. त त्या मुदती दाखविते. आणि च तितक्या मुदतींचें व्याजमुद्दल.

दुसरीटीप. जेव्हां कोणतेही मुदलाचें चक्रवाढीनें व्याज किंवा मुद्दल करायाची इछा आहे तेव्हां तें त्या पुढील रीतीवरून करावें.

प्रथमरीति. जेव्हां मुदत एक वर्षाचा कोणताही बरांबर भाग आहे. पूर्वरीतीनें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल काढावें. नंतर ती मुदत वर्षाचा कितवा भाग आहे, तो अंक त्यास मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें. म्हणजे त्या मुदतीचें एक रुपयाचें व्याजमुद्दल झालें. त्यास सांगितले मुदलानें गुणावें, म्हणजे इछिलेल्या मुदतीचें व्याजमुद्दल झालें.

दुसरीरीति. जेव्हां मुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भाग नाहीं, तेव्हां सांगितले मुदतीचे दिवस करावे आणि एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे, त्यास ३६५ हा अंक

मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें. तें मूळ एक रुपयाचें एक दिवसाचें व्याजमुद्दल झालें. मग तें सांगितले मुदतीचें दिवस संख्या घातपर्यंत वाढवावें. म्हणजे एक रुपयाचें तितके दिवसांचें व्याजमुद्दल झालें. नंतर त्यास सांगितले मुद्दलानें गुणावें; तो गुणाकार इच्छिलें व्याजमुद्दल होईल. त्या कामाचा तपशील करितेसमयीं लागरतंम बहुत उपयोगीं पडेल.

प्राप्ति.

प्राप्तिशब्द कामांत घेतात. ऐसाजे, जो पैक्याचा लाभ बराबर मुदतींवर होतो. जसा कर्जाचें व्याज, घर भूमि इत्यादिकांचें भाडें, चाकरीचें वेतन, वर्षासन, आणि वाळपर्वेशी इत्यादि. हे सर्व लाभ मुदतीचे मुदतीस पावतात. परंतु बहुत करून वर्षाचे मुदतीवर आहेत.. त्या सर्व लाभांस प्राप्ति असें म्हणतात.

प्राप्ति दोनप्रकारची आहे. वर्तमान आणि भविष्य. वर्तमान प्राप्ति म्हणजे जो पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती होय. भविष्यप्राप्ति म्हणजे पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला नाहीं, परंतु कांहीं मुदतीनें किंवा कांहीं प्रतिबंध असेल तो दूर

झाल्यावर निश्चित हातीं येणार.

जेव्हां प्राप्ति कितीएक वर्षे अवरुद्ध आहे, म्हणून पैका पावला नाहीं तीस अवरुद्ध प्राप्ति म्हणतात.

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत. सांवधि आणि निरवधि. सावधि प्राप्ति म्हणजे ज्या प्राप्तीस कालमर्यादा आहे. ५ वर्षे, १० वर्षे इत्यादि. निरवधि प्राप्ति म्हणंजे ज्या प्राप्तीस काळमर्यादा नाहीं. अखंड चालणारी.

प्राप्तीचें व्याजमुद्दल म्हणजे अवरुद्धप्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल त्यांची बेरीज.

प्राप्तीची वर्तमान किंमत म्हणजे प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका एकाएकीं देण्यास घेण्यास योग्य आहे तो होय.

अ = प्राप्ति.
न = अवरुद्धप्राप्तीची वर्षसंख्या
च = एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याजमुद्दल.
म = प्राप्तीचें व्याजमुद्दल.
व = प्राप्तीची वर्तमान किंमत.
} [illegible]

आतां च राशीची वर्तमान किंमत १ आहे. त्याजकरितां प्रमाणानें कोणतीही दुसरी राशि. जसा अ त्याची किंमत निघेल.

जसें च : १ : : अ : $\frac{अ}{च}$ ही अची वर्तमानकिंमत जी एक वर्षानंतर मिळेल आणि च : १ : : $\frac{अ}{च}$: $\frac{अ}{च^{२}}$ ही अची वर्तमानकिंमत जी दोन वर्षांनंतर मिळेल.

तसें त्याप्रमाणें पुढेंही. $\frac{अ}{च^{३}}$, $\frac{अ}{च^{४}}$, $\frac{अ}{च^{५}}$, इत्यादि. त्या सर्व अच्या वर्तमान किमती. ३, ४, ५ इत्यादि वर्षांनंतर मिळतील त्याजकरितां त्या सर्वांची बेरीज.

म्हणजे $\frac{अ}{च} + \frac{अ}{च^{२}} + \frac{अ}{च^{३}} + \frac{अ}{च^{४}} + \frac{अ}{च^{५}}$ इत्यादि.

किंवा $\left(\frac{१}{च} + \frac{१}{च^{२}} + \frac{१}{च^{३}} + \frac{१}{च^{४}} + \frac{१}{च^{५}}\right) \times अ$ ही बेरीज न पदापर्यंत न वर्षसंख्येच्या प्राप्तीची वर्तमान किंमत होईल. आणि निरवधिप्राप्तीची किंमत त्या श्रेणीची अनंतपदेंपर्यंत बेरीज आहे. परंतु सत्वर दिसतें कीं ही श्रेढी भूमितिप्रमाणांत आहे. जिचें प्रथमपद $\frac{१}{च}$ गुणोत्तर $\frac{१}{च}$ आणि गच्छ न आहे. त्याजकरितां त्या श्रेढीचें सर्वधन किंवा वर्तमान किंमत

$$ब = \frac{\frac{१}{च} - \frac{१}{च} \times \frac{१}{च^{न}}}{१ - \frac{१}{च}} \times अ = \frac{च^{न} - १}{च - १} \times \frac{अ}{च^{न}}$$

जेव्हां प्राप्ति निरवधि आहे. तेव्हां न गच्छ अनंत आहे आणि $च^{न}$ हाही अनंत आहे. त्याजकरितां हें पद $\frac{१}{च^{न}}$ = ० शून्य होतें. त्यास्तव $\frac{अ}{च-१} \times \frac{१}{च^{न}}$ हें ही = ० आहे. त्यापासून कळतें कीं पूर्वसमीकरणास हें रूप होतें, $ब = \frac{अ}{च-१}$ म्हणजे कोणतीही प्राप्ति एक रुपयाचे एकवर्षाचे व्याजानें भागून तो भागाकार नि

रवधिप्राप्तीची किंमत होतो.

अशानें जर व्याजाचा दर शंभरास पांचोत्रा असेल तर १००अ÷५=२०अ हा निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें आहे. आणि १००अ÷४=२५अ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाच्या दरानें आहे आणि १००अ÷३=३३⅓अ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत ३ रुपये व्याजाचे दरानें आहे. इत्यादि.

पुनः एक रुपयाचें न वर्षांत व्याजमुद्दल = $च^{न}$ आहे. त्याजकरितां $च^{न}-१$ ही त्या मुद्दलावर वृद्धि झाली. परंतु त्याचें एक वर्षाचें व्याज किंवा प्राप्ति जी त्या वृद्धीवर आहे. म्हणजे च-१ त्याजकरितां.

जसें. च-१ : $च^{न}-१$: : अ : म. म्हणजे.

$म=\frac{च^{न}-१}{च-१}\times अ$ आतां अवरुद्धप्राप्तीस जे वेगळाले प्रकार लागतात, ते त्या पूर्वसमीकरणापासून निघतील.

$$म=\frac{च^{न}-१}{च-१}\times अ=व च^{न}$$

$$व=\frac{च^{न}-१}{च-१}\times\frac{अ}{च^{न}}=\frac{म}{च^{न}}$$

$$अ=\frac{च-१}{च^{न}-१}\times म=\frac{च-१}{च^{न}-१}\times व च^{न}$$

$$न = \frac{ला०म - ला०व}{ला०ब} = \frac{ला०\frac{मब - म + अ}{अ}}{ला०ब}$$

$$ला०ब = \frac{ला०म - ला०व}{न}$$

$$र = \left(\frac{1}{ब^{प}} - \frac{1}{ब^{न}}\right) \times \frac{अ}{ब-1}$$

ह्या शेवटील समीकरणांत र भविष्य प्राप्तीची वर्तमान किंमत प वर्षानंतर आहे, ती दाखविते. आणि हें त्याप्रमाणें उत्पन्न होतेंकीं.

ह्या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत प आणि न वर्षे लिहावीं.

म्हणजे $\frac{ब^{न}-1}{ब-1} \times \frac{अ}{ब^{न}} - \frac{ब^{प}-1}{ब-1} \times \frac{अ}{ब^{प}}$.

परंतु कोणतेही प्राप्तीचें व्याजमुद्दल आणि वर्तमान किंमत कितीएक वर्षांची २१ वर्षेपर्यंत ह्या पुढील दोन सारणी — कोष्टकांचे साहाय्यानें निघेल.

प्रथमकोष्टक.

एकरुपयाचें प्रासीचें चक्रवाढव्याजानें व्याजमुद्दल.						
वर्षे	दरशेंकडा रुपये ३ प्र०	दरशेंकडा रुपये ३½ प्र	दरशेंकडा रुप० ४ प्रमा	दरशेंकडा रु० ४½ प्र०	दरशेंकडा रुप० ५ प्रमा-	दरशेंकडा रुपये ६ प्र-
१	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००
२	२·०३००	२·०३५०	२·०४००	२·०४५०	२·०५००	२·०६००
३	३·०९०९	३·१०६२	३·१२१६	३·१३७०	३·१५२५	३·१८३६
४	४·१८३६	४·२१४९	४·२४६५	४·२७८२	४·३१०१	४·३७४६
५	५·३०९१	५·३६२५	५·४१६३	५·४७०७	५·५२५६	५·६३७१
६	६·४६८४	६·५५०२	६·६३३०	६·७१६९	६·८०१९	६·९७५३
७	७·६६२५	७·७७९४	७·८९८३	८·०१९२	८·१४२०	८·३९३८
८	८·८९२३	९·०५१७	९·२१४२	९·३८००	९·५४९१	९·८९७५
९	१०·१५९१	१०·३६८५	१०·५८२८	१०·८०२१	११·०२६६	११·४९१३
१०	११·४६३९	११·७३१४	१२·००६१	१२·२८८२	१२·५७७९	१३·१८०८
११	१२·८०७८	१३·१४२०	१३·४८६४	१३·८४१२	१४·२०६८	१४·९७१६
१२	१४·१९२०	१४·६०२०	१५·०२५८	१५·४६४०	१५·९१७१	१६·८६९९
१३	१५·६१७८	१६·११३०	१६·६२६८	१७·१५९९	१७·७१३०	१८·८८२१
१४	१७·०८६३	१७·६७७०	१८·२९१९	१८·९३२१	१९·५८८६	२१·०१५१
१५	१८·५९८९	१९·२९५७	२०·०२३६	२०·७८४१	२१·५७८६	२३·२७६०
१६	२०·१५६९	२०·९७१०	२१·८२४५	२२·७१९३	२३·६५७५	२५·६७२५
१७	२१·७६१६	२२·७०५०	२३·६९७५	२४·७४१७	२५·८४०४	२८·२१२९
१८	२३·४१४४	२४·४९९७	२५·६४५४	२६·८५५१	२८·१३२४	३०·९०५७
१९	२५·११६९	२६·३५७२	२७·६७१२	२९·०६३६	३०·५३९०	३३·७६००
२०	२६·८७०४	२८·२७९७	२९·७७८१	३१·३७१४	३३·०६६०	३६·७८५६
२१	२८·६७६५	३०·२६९५	३१·९६९२	३३·७८३१	३५·७१९३	३९·९९२७

दुसरें कोष्टक.

एक रुपयाचे प्रासीनी चक्रवाढव्याजानें वर्तमानकिंमत

वर्षे	दरशेंकडा रुपये ३ प्र०	दरशेंकडा रुपये ३½ प्र	दरशेंकडा रुप० ४ प्र०	दरशेंकडा रुप० ४½ प्र	दरशेंकडा रु० ५ प्रमा	दरशेंकडा रु० ६ प्रमाणें
१	०·९७०९	०·९६६२	०·९६१५	०·९५६९	०·९५२४	०·९४३४
२	१·९१३५	१·८९९७	१·८८६१	१·८७२७	१·८५९४	१·८३३४
३	२·८२८६	२·८०१६	२·७७५१	२·७४९०	२·७२३२	२·६७३०
४	३·७१७१	३·६७३१	३·६२९९	३·५८७५	३·५४६०	३·४६५१
५	४·५७९७	४·५१५१	४·४५१८	४·३९००	४·३२९५	४·२१२४
६	५·४१७२	५·३२८६	५·२४२१	५·१५७९	५·०७५७	४·९१७३
७	६·२३०३	६·११४५	६·००२०	५·८९२७	५·७८६४	५·५८२४
८	७·०१९७	६·८७४०	६·७३२७	६·५९५९	६·४६३२	६·२०९८
९	७·७८६१	७·६०७७	७·४३५३	७·२६८८	७·१०७८	६·८०१७
१०	८·५३००	८·३१६६	८·११०९	७·९१२७	७·७२१७	७·३६०१
११	९·२५२६	९·००१६	८·७६०५	८·५२८९	८·३०६४	७·८८६९
१२	९·९५४०	९·६६३३	९·३८५१	९·११८६	८·८६३३	८·३८३८
१३	१०·६३५०	१०·३०२७	९·९८५७	९·६८२९	९·३९३६	८·८५२७
१४	११·२९६१	१०·९२०५	१०·५६३१	१०·२२२८	९·८९८६	९·२९५०
१५	११·९३७९	११·५१७४	११·११८४	१०·७३९५	१०·३७९७	९·७१२२
१६	१२·५६११	१२·०९४१	११·६५२३	११·२३४०	१०·८३७८	१०·१०५९
१७	१३·१६६१	१२·६५१३	१२·१६५७	११·७०७२	११·२७४१	१०·४७७३
१८	१३·७५३५	१३·१८९७	१२·६५९३	१२·१६००	११·६८९६	१०·८२७६
१९	१४·३२३८	१३·७०९८	१३·१३३९	१२·५९३३	१२·०८५३	११·१५८१
२०	१४·८७७५	१४·२१२४	१३·५९०३	१३·००७९	१२·४६२२	११·४६९९
२१	१५·४१५०	१४·६९८०	१४·०२९२	१३·४०४७	१२·८२१२	११·७६४१

कोणतेही प्राप्तीनें किती एक सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें व्याजमुद्दल काढायाचें.

प्रथम कोष्टकांतून सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें एक रुपयाचें व्याजमुद्दल काढावें. आणि तें सांगितले प्राप्तीनें गुणावें. तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें त्या दरानें व्याजमुद्दल होईल. त्याची उलट केली असतां वर्षें आणि दर निघेल.

• उदाहरण, ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ती. कांहीं निमित्ता नें २० वर्षेंपर्यंत बंद राहिली असतां चक्रवाढव्याज दरशेंकडा दरसाल रुपये ७३ प्रमाणें तितक्या वर्षांचें व्याजमुद्दल किती होईल ?

आतां प्रथम कोष्टकांत वर्षांखालीं २० चे ओळींत रुपये ७३ चे दराखालीं एक रुपयाचें व्याजमुद्दल २८·२७९७ आहे तें ५०० शें त्यांनीं गुणून झाला गुणाकार १४१३९·८५ हा किंवा १४१३९ रुपये ३ पावले ४० रेस हें दुस्लिलें व्याजमुद्दल हें उत्तर.

कोणतेही सांगितले प्राप्तीचीं सांगितलीं वर्षेंपर्यंत सांगितले दरानें वर्तमानकिंमत काढायाची.

दुसरे कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणें एक रुपयाची वर्तमान

किंमत काढावी . आणि ती सांगितले प्राप्तीनें गुणावी . तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीची सांगितली वर्षेपर्यंत सांगितले दरानें वर्तमान किंमत होईल .

उदाहरण , ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दरसाल दरशेंकडा रुपये ३½ चक्रवाढ व्याज त्या दरानें वर्तमान किंमत काय होईल ?

आतां दुसरे कोष्टकांत वर्षाखालीं २० चे ओळींत रुपयें ३½ चे दराखालीं एक रुपयाची वर्तमान किंमत १४·२१२४ आहे ती ५०० त्यांनीं गुणून झाला गुणाकार ७१०६·२ हा . किंवा ७१०६ रुपये ०पावले ८०रेस ही इच्छिली वर्तमान किंमत आहे हें उत्तर .

दुसरें , आजपासून १० वर्षांनंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति चालू होणार . ती त्या दिवसापासून ११ वर्षेपर्यंत चालेल . अथवा आजपासून २१ वर्षांनीं बंद होईल . तर त्या प्राप्तीची वर्तमानकिंमत दरशेंकडा दरवर्षास ४ रुपये चक्रवाढ व्याजाचे दरानें काय होईल ?

त्यासारिखे उदाहरणांत दोन मुदतींच्या बरोबर दोन प्राप्तींच्या वर्तमान किंमती काढून त्याची वजावाकी करावी . म्हणजे त्याप्रमाणें होतें .

दुसरे कोष्टकांतून काढिले दोन किंमतींची वजाबाकी करावी, आणि ती बाकी सांगितले मासीनें गुणावी. तो गुणाकार इछिली वर्तमान किंमत होईल.

असें कोष्टकांत २१ वर्षांची वर्तमानकिंमत	१४·०२९२
आणि १० वर्षांची वर्तमान किंमत	८·११०९
त्यांची वजाबाकी	५·९१८३
	२००
	११८३·६६००
	४
	२·६४००
	१००
	६४·००००

तर ११८३ रुपये २ पावले ६४ रेस, इछिली वर्तमान किंमत, हें उत्तर